Klausur zur Vorlesung MECHANIK (P1) — Prof. D. Habs / Prof. H. Lesch — WS 02/03

Musterlösung 3. Klausur

1 Rasendes Elektron (10 Punkte)

(Je Teilaufgabe 2 Punkte.)

Lorentzfaktor $\gamma = 1.25$

(a) $t = \frac{L}{v} = \frac{L}{0.6c} = 5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$

(b) $t' = t/\gamma = 4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$

(c) $L' = L/\gamma = 7.2\,\mathrm{m}$

(d) $m/m_0 = \gamma = 1.25$

(e) $\frac{E_{kin}}{m_0 c^2} = \gamma - 1 = 0.25$

2 Pendelndes Rad (8 Punkte)

Der prinzipielle Unterschied zwischen den Fällen A und B besteht darin, daß man bei freier Drehachse C das Rad als Punktmasse betrachten kann, ist C blockiert, muß auch das Trägheitsmoment des Rades bezüglich C berücksichtigt werden und Steinerscher Satz angewandt.

Fall A:

(a)

$$I = md^2 \quad \wedge \quad I\dot{\omega} + mgd\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{d}\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

Für kleine θ gilt damit näherungsweise

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{d}\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$$

(b) Mit der Näherung $\theta \ll 1$ kann man die Bewegungsgleichung lösen, und wenn die Maximalauslenkung θ_0 für $t = 0$ erreicht wurde ist

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\omega t, \quad \dot{\theta} = -\omega\theta_0 \sin\omega t, \quad \ddot{\theta} = -\omega^2\theta_0\cos\omega t \quad .$$

somit für

$$t = 0 \quad : \quad \theta = \theta_0 \quad \text{und} \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{d}\theta_0$$

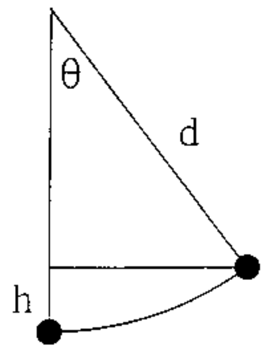
Es geht aber auch ohne Näherung, denn die Bewegungsgleichung (1) gilt zu jedem Zeitpunkt, also insbensondere auch dann, wenn $\theta = \theta_0$. Zu diesem Zeitpunkt gilt dann ungenähert

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{d}\sin\theta$$

(c) Wieder zuerst mit Näherung: $\theta = 0$ für $\omega t = \pi/2$. Dann ist

$$\dot{\theta} = -\omega\theta_0 = -\sqrt{\frac{g}{d}}\,\theta_0$$

Die Lösung ohne Näherung folgt aus dem Energieerhaltungssatz:



$$mgh = \frac{1}{2}\,mv^2 \quad . \quad \text{wobei} \quad \frac{d-h}{d} = \cos\theta_0 \quad \Leftrightarrow \quad h = d(1-\cos\theta_0)$$

damit

$$mgd(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{1}{2}\,m\omega^2 d^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{d}\,(1-\cos\theta_0)}$$

Fall B:

(a)

$$I = I_C + md^2 \quad \wedge \quad I\dot{\omega} + mgd\,\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_C + md^2}\,\sin\theta = 0$$

Die Näherung für kleine θ ist damit

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_C + md^2}\,\theta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + md^2}{mgd}}$$

(b) Analog zu Fall ist in obiger Näherung

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{I_C + md^2}\,\theta_0$$

bzw. streng

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{I_C + md^2}\,\sin\theta_0$$

(c) Genähert:

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{mgd}{I_C + md^2}}\,\theta_0$$

und aus Energieerhaltung für beliebig große Winkel:

$$\omega = \sqrt{\frac{2mgd}{I_C + md^2}\,(1-\cos\theta_0)}$$

3 Wasserwellen (4 Punkte)

(Je Teilaufgabe 2 Punkte.)

(a)

$$v_{\text{ph}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad \Rightarrow \quad \omega = v_{\text{ph}} \cdot k = \sqrt{gk}$$

Für die Gruppengeschwindigkeit gilt

$$v_{\text{gr}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \sqrt{g}\,\frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\,v_{\text{ph}}$$

Für $\lambda = 1000\,\text{m}$ ist $v_{\text{ph}} = 39.51\,\text{m/s}$, $v_{\text{gr}} = 19.76\,\text{m/s}$.

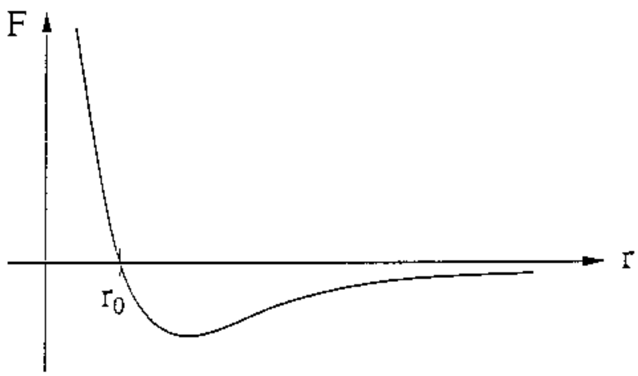
(b)

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{kT}{\rho} + \frac{g}{k}} \quad . \qquad v_{\text{gr}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{k^3T}{\rho} - gk}}\left(\frac{3k^2T}{\rho} - g\right)$$

$$v_{\text{gr}} = \frac{1}{2k}\left(\sqrt{\frac{k^3T}{\rho} + gk} + \frac{2k^3T}{\rho\sqrt{\frac{k^3T}{\rho} + gk}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{kt}{\rho} + \frac{g}{k}} + \frac{2kT\ \rho}{\sqrt{\frac{kt}{\rho} - \frac{g}{k}}}\right) = \frac{1}{2}\left(v_{\text{ph}} - \frac{2kT}{v_{\text{ph}}} \right.$$

4 Molekülschwingungen (8 Punkte)

(a) $F = -\frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3}$



(b) Im Gleichgewichtsabstand r_0 ist

$$F = -\frac{a}{r_0^2} + \frac{b}{r_0^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{r_0} = a \quad \Longleftrightarrow \quad r_0 = \frac{b}{a}$$

(c) Taylorentwicklung um r_0 liefert für $x = r - r_0$:

$$F(x) = F(r_0) + F'(r_0) \cdot x = F'(r_0) \cdot x \quad ; \qquad (F(r_0) = 0)$$

$$F'(r_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,F(r)|_{r=r_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-ar^{-2} + br^{-3}\right)_{r=r_0} = 2ar_0^{-3} - 3br_0^{-4}$$

Damit

$$F(x) = m\ddot{x} = \left(\frac{2a}{r_0^3} - \frac{3b}{r_0^4}\right)x \quad \Longleftrightarrow \quad m\ddot{x} + \left(\frac{3b}{r_0^4} - \frac{2a}{r_0^3}\right)x = 0$$

wobei der Klammerterm die effektive Federkonstante k ist, also

$$k = \frac{3b}{r_0^4} - \frac{2a}{r_0^3} = \frac{3ba^4}{b^4} - \frac{2aa^3}{b^3} = \frac{a^4}{b^3}$$

(d)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Longleftrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{m\,\frac{b^3}{a^4}}$$

5 Federpendel (4 Punkte)

Die Überlegung ist falsch.

Begründung:

Die Energiebilanz des Federpendels ist fehlerhaft angesetzt. Die stabile Gleichgewichtslage entspricht dem Ort *minimaler* potentieller Gesamtenergie und berechnet sich damit nach

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{pot}}}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(-mgy + \frac{1}{2}ky^2\right) = -mg + ky = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{mg}{k}$$

Dies ist gleichbedeutend zur Aufstellung des statischen Kräftegleichgewichts in der Ruhelage.

Die in der Aufgabenstellung suggerierte Bewegung der Masse vom Aufhängepunkt $y = 0$ zum Gleichgewichtspunkt, rein durch Umwandlung von potentieller Energie der Masse in potentielle Energie der Feder ist nicht möglich. Ein Teil der potentiellen Energie wird in kinetische Energie umgesetzt. Ohne weitere, äußere Kräfte (Dämpfung) hatdie Masse bei $y = mg/k$ gerade ihre maximale Geschwindigkeit. (Vgl. auch Aufgabe Bungee-Springer vom Übungsblatt.)

6 Hydrodynamik (6 Punkte)

(a) Euler-Gleichung (gilt für ideale, d. h. reibungsfreie Flüssigkeiten):

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\varrho}\vec{\nabla}p$$

Dabei ist

$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$	=0 für stationäre Strömungen
$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$	Konvektionsbeschleunigung
$\vec{g}$	$\sim$ Schwerkraft
$\frac{1}{\varrho}\vec{\nabla}p$	$\sim$ Druckkraft

(b) Navier-Stokes-Gleichung ist die Euler-Gleichung, erweitert um die Reibungskraft:

$$\varrho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\right)\vec{u}=-\vec{\nabla}p+\varrho\vec{g}-\eta\,\Delta\vec{u}$$

Dabei ist:

$\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{u}$	zeitliche Änderung von $\vec{u}$
$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\,\vec{u}$	$=\frac{1}{2}\,\vec{\nabla}u^2-\vec{u}\times\vec{\nabla}\times\vec{u}$: räumliche Änderung von $\vec{u}$
$\frac{1}{2}\,\vec{\nabla}u^2$	Änderung von u
$\vec{u}\times\vec{\nabla}\times\vec{u}$	Änderung der Richtung
$-\vec{\nabla}p$	$\sim$ Druckkraft
$\varrho\vec{g}$	$\sim$ Schwerkraft
$\eta\,\Delta\vec{u}$	$\sim$ Reibungskraft

(c) Die Bernoulli-Gleichung gilt für reibungsfreie, inkompressible Flüssigkeiten:

$$p+\frac{1}{2}\,\varrho u^2=p_0=\text{konst.}$$

Dabei ist:

p_0	Gesamtdruck an der Stelle mit $u=0$.
$\frac{1}{2}\,\varrho u^2=p_0-p$	Staudruck oder dynamischer Druck
$p=p_0-\frac{1}{2}\,\varrho u^2$	statischer Druck

7 Erde mit Loch (15 Punkte — Zusatzaufgabe!)

7Pkte. (a) Definiere

Erdradius	R
Erdbeschleunigung an Erdoberfläche	g

Dann ist

$$a(r)=r\cdot\frac{g}{R}$$

und die Bewegungsgleichung des Körpers lautet

$$\ddot{r}+r\,\frac{g}{R}=0\quad\Longleftrightarrow\quad\ddot{r}=-\frac{g}{R}\,r$$

Das ist die bekannte Bewegungsgleichung eines harmon. Oszillators, und mit der Randbedingung $r(t=0)=R$ hat sie die Lösung

$$\begin{aligned}r(t)&=R\cos\omega t\\\dot{r}(t)&=-\omega R\sin\omega t\\\ddot{r}(t)&=-\omega^2R\cos\omega t=-\omega^2\,r(t)\end{aligned}$$

Also

$$\omega^2=\frac{g}{R}\quad\Longleftrightarrow\quad\omega=\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Für das „Durchfallen“ der Erde ist eine halbe Periode erforderlich, d. h.

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 42{,}2\,\mathrm{min}$$

Im Erdzentrum wird die maximale Geschwindigkeit erreicht:

$$v(t = T/4) = \omega R \sin\left(\omega\frac{T}{4}\right) = \sqrt{gR}\,\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,\frac{\pi}{2}\,\sqrt{\frac{R}{g}}\right) = \sqrt{gR} = 7905\ \mathrm{m/s}$$

(b) (s. handschriftliche Blätter) (10 P.)

b) fehlt leider, aber wer dafür noch Zeit gehabt hätte braucht eh keine Lösung :)