

2. Klausur

Donnerstag, 09.01.2003 — Bearbeitungszeit: 120 Minuten

1 Vektoren und Felder (6 Punkte)

(a) Es sei $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Beweisen Sie, daß $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{v}$, wobei $\vec{\omega}$ ein konstanter Vektor ist.

(b) Berechnen Sie

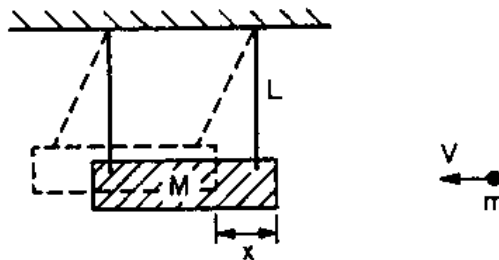
$$\iint_A \vec{F} \cdot \vec{N} \, dA,$$

wobei $\vec{F} = 4xz \vec{e}_x - y^2 \vec{e}_y + yz \vec{e}_z$, \vec{N} der Flächennormalenvektor und A die Oberfläche des durch $\{x=0, x=1; y=0, y=1; z=0, z=1\}$ begrenzten Würfels ist.

2 Ballistisches Pendel (7 Punkte)

Mit einem ballistischen Pendel kann z. B. die Geschwindigkeit einer Pistolenkugel bestimmt werden: Die Kugel bekannter Masse m und unbekannter Geschwindigkeit v_0 trifft auf einen ruhenden Holzblock bekannter Masse M , in dem sie steckenbleibt. Der Holzblock ist an (masselos gedachten) Fäden aufgehängt, mit denen er ein Pendel der Länge L bildet, das durch die Kugel zur Schwingung angeregt wird. Durch Messung der Schwingungsamplitude x_0 längs der x -Achse kann die Geschwindigkeit des Blocks unmittelbar nach dem Auftreffen der Kugel und daraus die Geschwindigkeit der Kugel vor dem Aufprall bestimmt werden.

Geben Sie diese Geschwindigkeit in Abhängigkeit von m , M , L und x_0 an.



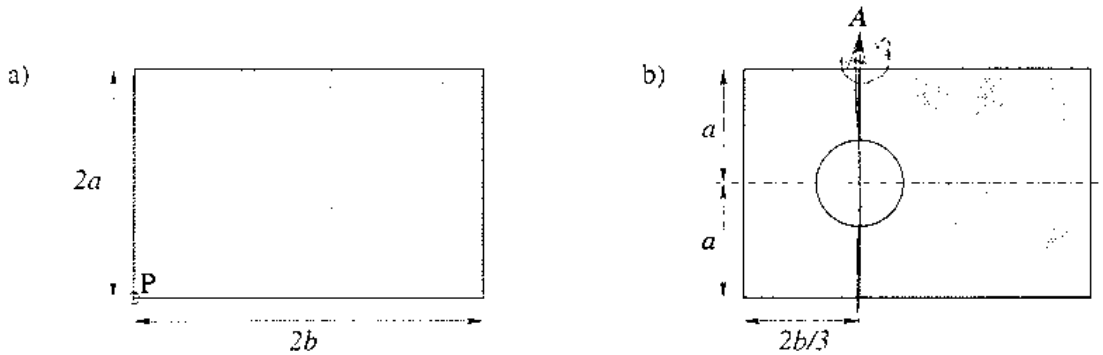
3 Rotierendes Rechteck (10 Punkte)

(a) Eine rechteckige Platte der Dicke d mit konstanter Dichte ρ und den Seitenlängen $2a$ und $2b$ rotiert um eine Achse senkrecht zur Plattenebene.

- (i) Berechne das Trägheitsmoment I_{SP} , falls die Achse durch den Schwerpunkt geht.
- (ii) Berechne das Trägheitsmoment I_P , falls die Achse durch einen Eckpunkt P geht.

- (b) Die Platte aus Aufgabe (a) wird mit einem Loch vom Radius $b/4$ versehen, dessen Mittelpunkt den Abstand $2b/3$ bzw. a zu den Seiten hat (s. Skizze).

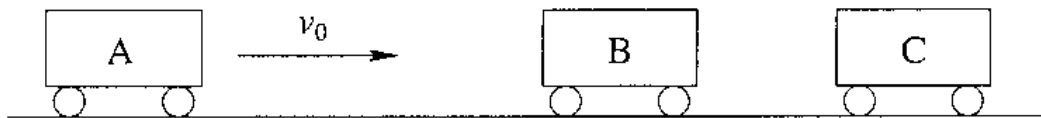
Berechne das Trägheitsmoment I_A , für eine Rotation um die Achse A , welche durch den Mittelpunkt des Lochs verläuft.



4 Eisenbahn-Stöße (10 Punkte)

Beim Rangieren stößt ein Waggon A der Masse $m_A = m$ mit der Geschwindigkeit v_0 auf zwei einzeln stehende Waggonen B, C der Massen $m_B = m/2$ und $m_C = 3m/4$.

- (a) Wieviele Zusammenstöße finden insgesamt statt, wenn diese elastisch ablaufen? Mit welchen Geschwindigkeiten v_A, v_B und v_C bewegen sich die Waggonen nach dem letzten Zusammenstoß?
- (b) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die stehenden Waggonen B, C vertauscht sind?



5 Kinderspielplatz (7 Punkte)

Auf vielen Kinderspielplätzen findet man ein einfaches Karussell, das im wesentlichen aus einer drehbar gelagerten, horizontalen Scheibe besteht. Die Scheibe habe die Masse $M = 100 \text{ kg}$, den Radius $r = 1,2 \text{ m}$ und drehe sich zu Beginn mit 10 Umdrehungen pro Minute um ihren Mittelpunkt.

Ein kleiner, dicker Junge ($m = 50 \text{ kg}$) springt mit Anlauf ($v_0 = 5 \text{ m/s}$) tangential auf den Rand der Scheibe (im Drehsinn). Mit welcher Winkelgeschwindigkeit dreht sich die Scheibe nach dem Aufsprung?

Die Scheibe wird nun von außen beschleunigt, bis sie für eine Umdrehung nur noch 1 Sekunde braucht. Das ist dem Jungen deutlich zu schnell, und er beschließt abzuspringen. Mit welcher Geschwindigkeit kommt er auf dem Boden an, wenn er in radialer Richtung mit $v_r = 3 \text{ m/s}$ vom Rand der Scheibe aus abspringt? Kann er (zumindest theoretisch) die Scheibe abbremsen, ohne sie zu verlassen? (Das Trägheitsmoment der Scheibe ist abzuleiten.)