MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. H. Kalf

WS 2003/04
2. Klausur
04.02.2004

Aufgaben der 2. Klausur zu MPIII

1. Auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wird die Differentialgleichung $(*) \quad x' = t\,x^3$ betrachtet.
   a) Begründen Sie, daß es für jeden Punkt $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ genau eine maximal fortgesetzte Lösung x von $(*)$ mit $x(t_0) = x_0$ gibt.
   b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $(*)$.
   c) Stellen Sie die allgemeine Lösung von $(*)$ in einer Skizze dar.

2. Gegeben sei die Differentialgleichung $(*) \quad (t^2+1)\,x' + 2\,t\,x(x-1) = 0$ für alle $(t,x) \in G = \mathbb{R} \times (0, \infty)$.
   a) Zeigen Sie, daß $(*)$ zwar nicht exakt ist, aber einen Multiplikator M der Form $M(x,t) = x^\alpha$ (für ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$) besitzt.
   b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $(*)$.
   c) Stellen Sie die allgemeine Lösung von $(*)$ in einer Skizze dar.

3. Auf $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ werden die Riccatische Differentialgleichung $(*)$ $x' = (2\,t^3 - 2\,t^2 + 1) + 2t\,(1-2\,t)\,x + 2t\,x^2$ sowie die lineare Differentialgleichung $(**)$ $y' + 2t\,y = 2t$ betrachtet.
   a) Zeigen Sie, daß $(*)$ eine Lösung x_1 der Form $x_1(t) = \alpha\,t$ (für ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$) besitzt.
   b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $(**)$.
   c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $(*)$ und geben Sie auch das jeweilige Definitionsgebiet an.

4. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z\,|z|$.
   a) Zeigen Sie anhand der Definition, daß f im Nullpunkt differenzierbar ist, und geben Sie $f'(0)$ an.
   b) Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, daß f in keinem Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist.
   c) Seien $r > 0$ und $\partial B_r(0)$ der positiv orientierte Kreis um den Nullpunkt mit Radius r. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\partial B_r(0)} f(z)\,dz$.

5. a) Seien $u \in \mathbb{C}$ mit $|u| \neq 2$ sowie $n \in \mathbb{Z}$; ferner bezeichne $\partial B_2(0)$ den positiv orientierten Kreis um den Nullpunkt mit Radius 2. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\partial B_2(0)} \frac{e^{iz}}{(z-u)^n}$ in Abhängigkeit von u und n.
   b) Bestimmen Sie die Laurentreihe der Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z-i}$, um den Punkt i.