MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. H. Kalf

WS 2003/04
1. Klausur
03.12.2003

Aufgaben der 1. Klausur zu MPIII

1. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π–periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & \text{für } 0 < x < \pi, \\ -\pi, & \text{für } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

   a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ und $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx$ $(k \in \mathbb{N})$ und zeigen Sie, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{2k+1}\sin((2k+1)x)$$

   die Fourierreihe von f darstellt.

   b) Begründen Sie, daß die Fourierreihe von f punktweise konvergiert, und geben Sie ihre Grenzfunktion explizit an. Konvergiert die Fourierreihe auch gleichmäßig?

   c) Zeigen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

2. Für reelle Zahlen a und b sei das Vektorfeld

$$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ V(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\,x\,y\cos z - y^2\,\sin z \\ a\,x^2\,\cos z - 2\,x\,y\sin z \\ b\,x\,y^2\,\cos z - x^2\,y\,\sin z \end{pmatrix}$$

   gegeben.

   a) Zeigen Sie, daß es genau ein Paar (a,b) gibt, für das V ein Potential besitzt, und geben Sie dieses an.

   b) Bestimmen Sie in dem Fall, daß V ein Potential besitzt, das Kurvenintegral über V längs des Weges $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t\cos t, t\sin t)$.

3. Gegeben sei die Funktion

$$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ p(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi \\ r\,\sin\varphi \\ r^2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Gaußschen Fundamentalgrößen sowie die Wurzel aus der Gramschen Determinante von p.

b) Seien $0 < a < b$. Berechnen Sie den Inhalt des zwischen den Ebenen $z = a^2$ und $z = b^2$ gelegenen Teils der durch p gegebenen Fläche.

4. Gegeben seien die offene Kugelschale

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$$

sowie das Vektorfeld

$$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ V(x, y, z) = (x\,y^2, y\,z^2, z\,x^2);$$

ferner bezeichne ν das äußere Einheitsnormalenfeld von ∂G. Bestimmen Sie das Integral $\displaystyle\int_{\partial G} V \cdot \nu$.

5. Berechnen Sie das Volumen des Teils der Kugel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\},$$

der im Inneren des einschaligen Hyperboloids

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

liegt.