MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. H. Steinlein

SS 2003
04.07.2003

Zweite Klausur zur linearen Algebra für Physiker (MPIIB)

1. Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathcal{B} = (x_1, x_2, x_3)$ eine Basis von V und s eine Bilinearform auf V mit

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, daß $\widetilde{\mathcal{B}} = (x_1 + x_2, 2x_2 + x_3, x_1 - x_3)$ eine Basis von V ist und berechnen Sie $M_{\widetilde{\mathcal{B}}}(s)$.

2. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Geben Sie eine Matrix in Jordan-Normalform an, die zur Matrix A ähnlich ist. Begründen Sie dabei unter Angabe der Nullstellen des charakteristischen Polynoms und deren algebraischer und geometrischer Vielfachheit die Ähnlichkeit der beiden Matrizen. Die Angabe einer Transformationsmatrix ist nicht notwendig.

3. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} .$$

Man bestimme das Minimalpolynom $m_A(\lambda)$ sowie A^4.

4. Es seien n gerade, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine orthogonale Matrix mit $\det A = 1$ und 1 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A. Man zeige, dass die algebraische Vielfachheit von 1 gerade ist.

5. Es sei $L_3 = \operatorname{span}\{1, \sin(x), \cos(x)\} \subset C([0, \pi])$ mit dem Skalarprodukt

$$S := \langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)g(t)dt \, .$$

Konstruieren sie unter Benutzung des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis von L_3.

6. Seien $a, c \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Man beweise:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) \Leftrightarrow b \perp a \wedge b \perp c$$