MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. H. Kalf

SS 2003
1. Klausur
21.05.2003

Aufgaben der 1. Klausur zu MPIIA

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei
$$f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x}{n^2}\, e^{-\frac{x}{n}}$$

   a) Bestimmen Sie $||f_n||_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

   b) Beweisen Sie, daß das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^\infty f_n(x)\,dx$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert, und berechnen Sie $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx$.

2. Es sei $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}\, x^n$ für $x \in \mathbb{R}$.

   a) Berechnen Sie den Konvergenzradius ϱ von f.

   b) Geben Sie die Stammfunktion F von f mit $F(0) = 0$ sowohl als Potenzreihe als auch in expliziter Darstellung an.

   c) Bestimmen Sie hieraus eine explizite Darstellung von f.

3. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 1)\cos x$.

   a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom T_3 von f an der Stelle 0.

   b) Zeigen Sie $|f(x) - T_3(x)| < \frac{1}{24}(5 + |x|)\, x^4$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

4. Zeigen Sie:

   a) Durch $d(x, y) = |2^x - 2^y|$ für x, $y \in \mathbb{R}$ wird eine Metrik d auf $\mathbb{R}$ definiert.

   b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist zwar eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}, d)$, besitzt aber keinen Grenzwert in $(\mathbb{R}, d)$.

5. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x + 1)\sqrt{y^2 + 1}$.

   a) Zeigen Sie anhand der Definition, daß f im Punkte $(0, 0)$ (total) differenzierbar ist.

   b) Berechnen Sie die Tangentialebene $T_f(0, 0)$ an f im Punkte $((0, 0), f(0, 0))$ sowie einen Normaleneinheitsvektor in diesem Punkt.