Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Steinlein

Wintersemester 2002/2003
24.1.2003

Zweite Klausur zur Linearen Algebra für Physiker (MPIB)

Nachname: .... Vorname: ....

Geburtsdatum: ....

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$\sum$

Bitte beachten Sie:

1. **Bitte tragen Sie sofort auf jedem Blatt Ihren Namen ein.**
2. **Kontrollieren Sie bitte, ob Sie alle 7 Seiten (Deckblatt + 6 Aufgaben) erhalten haben.**
3. Arbeitszeit: 16.15 - 18.15 Uhr
4. Zugelassene Hilfsmittel: Schreibgerät
5. Bei jeder Aufgabe sind 6 Punkte erreichbar.
6. **Schreiben Sie auf gar keinen Fall Lösungsvorschläge zu einer Aufgabe auf das zu einer anderen Aufgabe gehörende Papier!**
7. Bei Bedarf kann zusätzlich Papier angefordert werden.

Viel Erfolg!

Nachname: .... Vorname: ....

1. a) Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 1 & 2-i \\ 3i & -6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2i & 3 & -i \\ 1+i & 0 & -5i & 2 \end{pmatrix}$ Matrizen über $\mathbb{C}$. Welche der Produkte AB, BA, AC, CA, BC, CB sind definiert und in welchem Raum liegen sie? Berechnen Sie zwei davon.

b) Zu $x \in \mathbb{R}$ sei $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x(x-1)}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$A(x)A(y) = A(x+y).$$

Nachname: .... Vorname: ....

2. Sei $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $V = K^4$. Seien $b_1 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{2} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{2} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{1} \\ \overline{2} \end{pmatrix} \in V$.

   Es sei $U := \mathrm{span}(b_1, b_2, b_3)$.

   a) Sind $\{b_1, b_2, b_3\}$ linear unabhängig?

   b) Wählen Sie aus $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von U aus. Begründen Sie, dass die ausgewählten Vektoren tatsächlich eine Basis sind.

   c) Ergänzen Sie die in b) gefundenen Vektoren zu einer Basis von V. Beweisen Sie, dass dies tatsächlich eine Basis ist.

Nachname: . . . . Vorname: . . . .

3. Beweisen oder widerlegen Sie: Die folgenden Abbildungen sind $\mathbb{R}$-linear.

   a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ 0 \\ 3y - x \\ -5y \end{pmatrix},$

   b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (x-y)(x+y) \\ 4x + y \end{pmatrix},$

   c) $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x\varphi_0 + y\varphi_1 + z\varphi_2.$

   Hierbei sei $\varphi_i \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}), 0 \le i \le 2$, definiert durch $\varphi_i(t) = t^i$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Nachname: ....   Vorname: ....

4. Zeigen Sie, dass U und W Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind. Hierbei seien

   a) $U := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x + 2\pi) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$ die Menge der 2π-periodischen Funktionen,

   und

   b) $W := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) + 3f(2) = 0\}$.

Nachname: .... Vorname: ....

5. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, und $v_1, \ldots, v_n \in V$.
   Zeigen Sie:

   Genau dann sind die $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig, wenn $v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ linear unabhängig sind.

Nachname: .... Vorname: ....

6. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und X, Y, Z Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

   a) Ist $X \subset Z$, so gilt
   $$(X + Y) \cap Z = (X \cap Z) + (Y \cap Z).$$

   b) Gilt die Gleichheit in a) auch dann, wenn $X \not\subset Z$?