Christian Semrau, Alexandra Merz WS 02/03
24.1.2003

Lösung der Zweiten Klausur MPIB WS02

1. (a) Definiert sind die Produkte $BA \in \mathbb{C}^{3,2}$, $AC \in \mathbb{C}^{2,4}$, $BC \in \mathbb{C}^{3,4}$, bei allen anderen Produkten stimmt die Spaltenzahl des ersten Faktors nicht mit der Zeilenzahl des zweiten Faktors überein.
$BA = \begin{pmatrix} -2i & 2 \\ -2i & 2 \\ 9i & -9 \end{pmatrix}, AC = \begin{pmatrix} -1+i & 2i & 8 & i \\ 1+i & 2 & -8i & 1 \end{pmatrix},$
$BC = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -6i & -2 \\ 3+i & 2i & -2-10i & 4-3i \\ -6-6i & -6 & 39i & -9 \end{pmatrix}$

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt
$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{1}{2}x(x-1) \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & \frac{1}{2}y(y-1) \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1 & y+x & \frac{1}{2}y(y-1)+xy+\frac{1}{2}x(x-1) \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$
wegen $\frac{1}{2}y(y-1)+xy+\frac{1}{2}x(x-1) = \frac{1}{2}(y^2-y+2xy+x^2-x)$
$= \frac{1}{2}((y+x)^2-(x+y)) = \frac{1}{2}((y+x)(x+y-1))$

2. (a) $b_1 + b_2 = b_3$, deshalb sind die drei Vektoren linear abhängig.

(b) Jede der Mengen $\{b_1, b_2\}$, $\{b_1, b_3\}$, $\{b_2, b_3\}$ ist eine Basis von U.
$\{b_1, b_2\}$ ist Basis, denn $U = \text{span}\{b_1, b_2, b_3\} = \text{span}\{b_1, b_2, b_1+b_2\} = \text{span}\{b_1, b_2\}$ (also haben wir ein Erzeugendensystem) und aus $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0$ folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, wie man an der dritten und dann der vierten Zeile dieses Gleichungssystems sieht (damit sind die Vektoren linear unabhängig).

(c) Die kanonischen Einheitsvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{pmatrix}$ ergänzen $\{b_1, b_2\}$ zu einer Basis von V, denn es gilt $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 e_1 + \lambda_4 e_2 = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$, was man durch Lösen des linearen Gleichungssystems zeigen kann, und damit haben wir vier linear unabhängige Vektoren im K^4, die damit eine Basis bilden.

3. (a) Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2)-(y_1+y_2) \\ 0 \\ 3(y_1+y_2)-(x_1+x_2) \\ -5(y_1+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x_1-y_1)+(2x_2-y_2) \\ 0+0 \\ (3y_1-x_1)+(3y_2-x_2) \\ (-5y_1)+(-5y_2) \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

und

$$f\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda x_1-\lambda y_1\\0\\3\lambda y_1-\lambda x_1\\-5\lambda y_1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}2x_1-y_1\\0\\3y_1-x_1\\-5y_1\end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$$

Damit ist f $\mathbb{R}$-linear.

Alternativer Beweis:

Es ist $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1\\0&0\\-1&3\\0&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, und eine Abbildung der Form $v \mapsto Av$ ist stets K-linear, was im Tutorium gezeigt wurde.

(b) g ist nicht $\mathbb{R}$-linear, denn

$g\left(2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(2-0)(2+0)\\4\cdot 2+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$, aber

$2\cdot g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$.

(c) Seien $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $h\left(\lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\right) = h\begin{pmatrix}\lambda x_1+x_2\\\lambda y_1+y_2\\\lambda z_1+z_2\end{pmatrix}$

$= (\lambda x_1+x_2)\varphi_0+(\lambda y_1+y_2)\varphi_1+(\lambda z_1+z_2)\varphi_2 \overset{(*)}{=} \lambda(x_1\varphi_0+y_1\varphi_1+z_1\varphi_2)+(x_2\varphi_0+y_2\varphi_1+z_2\varphi_2) = \lambda\cdot h\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix} + h\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$. Dabei wurden bei $(*)$ die Vektorraumaxiome von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ benutzt.

Damit ist h $\mathbb{R}$-linear.

4. (a) U ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, denn

   i. Die Nullfunktion $\mathbf{0}$ liegt in U: $\mathbf{0}(x+2\pi) = 0 = \mathbf{0}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

   ii. Seien $f, g \in U$. Dann ist $(f+g)(x+2\pi) = f(x+2\pi)+g(x+2\pi) = f(x)+g(x) = (f+g)(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Also ist $(f+g) \in U$.

   iii. Sei $f \in U, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\lambda f)(x+2\pi) = \lambda f(x+2\pi) = \lambda f(x) = (\lambda f)(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Damit ist $\lambda f \in U$.

   (b) W ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, denn

   i. Die Nullfunktion $\mathbf{0}$ liegt in W: $\mathbf{0}(1)+3\,\mathbf{0}(2) = 0$.

   ii. Seien $f, g \in W$. Dann ist $(f+g)(1)+3(f+g)(2) = (f(1)+3f(2))+(g(1)+3g(2)) = 0+0 = 0$. Also ist $(f+g) \in W$.

   iii. Sei $f \in W, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\lambda f)(1)+3(\lambda f)(2) = \lambda f(1)+3\lambda f(2) = \lambda(f(1)+3f(2)) = \lambda\cdot 0 = 0$. Damit ist $\lambda f \in W$.

5. Seien $w_i := v_1+\cdots+v_i, i = 1,\ldots,n$.

"$\Rightarrow$":

Seien $v_1,\ldots,v_n$ linear unabhängig. Seien $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = 0$.

$\Rightarrow (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)v_1 + (\alpha_2 + \cdots + \alpha_n)v_2 + \cdots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)v_{n-1} + \alpha_n v_n = 0$

$$\overset{v_i \text{ l.u.}}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix} \alpha_1 + \cdots + \alpha_n & = 0 \\ \alpha_2 + \cdots + \alpha_n & = 0 \\ \vdots & \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n & = 0 \\ \alpha_n & = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Damit sind die w_i linear unabhängig.

"$\Leftarrow$":

Seien $w_1, \ldots, w_n$ linear unabhängig. Seien $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ mit $\sum_{i=1}^n \beta_i v_i = 0$.

$$\Rightarrow (\beta_1 - \beta_2)\underbrace{v_1}_{=w_1} + (\beta_2 - \beta_3)\underbrace{(v_1 + v_2)}_{=w_2} + \cdots + (\beta_{n-1} - \beta_n)\underbrace{(v_1 + \cdots + v_{n-1})}_{=w_{n-1}} + \beta_n\underbrace{(v_1 + \cdots + v_n)}_{=w_n} = 0$$

$$\overset{w_i \text{ l.u.}}{\Rightarrow} \left\{\begin{matrix} \beta_1 - \beta_2 & = 0 \\ \beta_2 - \beta_3 & = 0 \\ \vdots & \\ \beta_{n-1} - \beta_n & = 0 \\ \beta_n & = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta_1 = \ldots = \beta_n = 0.$$

Damit sind die v_i linear unabhängig.

6. (a) "$\supset$":

   Sei $a \in (X \cap Z) + (Y \cap Z)$, also $a = x + y$ mit $x \in X \cap Z, y \in Y \cap Z$. Dann ist $x + y \in Z$ (denn Z ist UVR von V) und $x + y \in X + Y$, also $a \in (X + Y) \cap Z$.

   "$\subset$":

   Sei $a \in (X + Y) \cap Z$, also $a = x + y$ mit $x \in X, y \in Y$ und $a \in Z$. Nach Voraussetzung ($X \subset Z$) ist dann $x \in Z$ und damit ist $y = a - x \in Z$. Deshalb ist $x \in X \cap Z$ und $y \in Y \cap Z$, also $a \in (X \cap Z) + (Y \cap Z)$.

   (b) Die Gleichheit gilt nicht immer. Gegenbeispiel:

   Seien $X = \text{span}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}), Y = \text{span}(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}), Z = \text{span}(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) \subset K^2$. Dann ist

   $X + Y = K^2, (X + Y) \cap Z = Z$, aber $X \cap Z = \{0\}, Y \cap Z = \{0\}, (X \cap Z) + (Y \cap Z) = \{0\}$.