Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Steinlein

Wintersemester 2002/2003
6.12.2002

Erste Klausur zur Linearen Algebra für Physiker (MPIB)

Nachname: .... Vorname: ....

Geburtsdatum: ....

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Bitte beachten Sie:

1. **Bitte tragen Sie sofort auf jedem Blatt Ihren Namen ein.**
2. **Kontrollieren Sie bitte, ob Sie alle 7 Seiten (Deckblatt + 6 Aufgaben) erhalten haben.**
3. Arbeitszeit: 16.15 - 18.15 Uhr
4. Zugelassene Hilfsmittel: Schreibgerät
5. Bei jeder Aufgabe sind 6 Punkte erreichbar.
6. **Schreiben Sie auf gar keinen Fall Lösungsvorschläge zu einer Aufgabe auf das zu einer anderen Aufgabe gehörende Papier!**
7. Bei Bedarf kann zusätzlich Papier angefordert werden.

Viel Erfolg!

Nachname: .... Vorname: ....

1. Geben Sie für das folgende lineare Gleichungssystem die Lösungsmenge in Abhängigkeit des Parameters $r \in \mathbb{R}$ an.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
4x_1 & + & 9x_2 & - & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 5 + r \\
3x_1 & + & 5x_2 & & & + & 2x_4 & = & 5 \\
2x_1 & + & 15x_2 & - & 10x_3 & + & 13x_4 & = & 13 + 13r
\end{array}
$$

Nachname: .... Vorname: ....

2. Beweisen oder widerlegen Sie:
Die Gleichungssysteme $GS1$ und $GS2$ haben für alle $a_{ij},\ b_k \in \mathbb{R}$, $1 \le i, j, k \le 3$, denselben Lösungsraum. Hierbei seien

a)

$$
GS1: \quad \begin{array}{rcrcl}
2a_{11}x_1 & - & 5a_{12}x_2 & = & 7b_1 \\
-3a_{21}x_1 & + & 4a_{22}x_2 & = & 6b_2
\end{array}
$$

und

$$
GS2: \quad \begin{array}{rcrcl}
(\frac{2}{3}a_{11} - \frac{1}{2}a_{21})x_1 & + & (-\frac{5}{3}a_{12} + \frac{2}{3}a_{22})x_2 & = & \frac{7}{3}b_1 + b_2 \\
(-6a_{11} + \frac{3}{2}a_{21})x_1 & + & (15a_{12} - 2a_{22})x_2 & = & -21b_1 - 3b_2
\end{array}
$$

b)

$$
GS1: \quad \begin{array}{rcrcrcl}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3
\end{array}
$$

und $GS2$:

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
(a_{11} + a_{21})x_1 & + & (a_{12} + a_{22})x_2 & + & (a_{13} + a_{23})x_3 & = & b_1 + b_2 \\
(a_{21} + a_{31})x_1 & + & (a_{22} + a_{32})x_2 & + & (a_{23} + a_{33})x_3 & = & b_2 + b_3 \\
(a_{11} + 2a_{21} + a_{31})x_1 & + & (a_{12} + 2a_{22} + a_{32})x_2 & + & (a_{13} + 2a_{23} + a_{33})x_3 & = & b_1 + 2b_2 + b_3
\end{array}
$$

Nachname: .... Vorname: ....

3. Die nachstehenden Permutationen seien Elemente der S_9.

   a) Berechnen Sie $x_1, \ldots, x_9 \in \{1, \ldots, 9\}$ mit

$$\sigma := (2437)(256)(1378)(29) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}.$$

   b) Stellen Sie die Permutation $\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 6 & 5 & 8 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ als Komposition paarweise elementfremder Zyklen dar.

   c) Sind σ und τ Elemente der A_9?

Nachname: .... Vorname: ....

4. a) Geben Sie die Definition der Begriffe Gruppenhomomorphismus, Gruppenisomorphismus und Gruppenautomorphismus an.

   b) Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi\colon G \to G$, $x \mapsto gxg^{-1}$, ein Gruppenautomorphismus ist.

Nachname: .... Vorname: ....

5. Sei G eine Gruppe. Die Menge $Z := \{x \in G \,|\, \forall g \in G\colon gx = xg\}$ heißt *Zentrum* von G. Zeigen Sie, dass Z ein Normalteiler von G ist.

Nachname: .... Vorname: ....

6. Sei G eine Gruppe und A, B Untergruppen von G. Zeigen Sie: Ist $A \cup B$ eine Untergruppe von G, so gilt $A \subset B$ oder $B \subset A$.