MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. H. Kalf

WS 2002/03
2. Klausur
28.01.2003

Aufgaben der 2. Klausur zu MPIA

1. Zeigen Sie, daß die Gleichung
$$e^x - \sin x + 2x = 2$$
genau eine reelle Lösung besitzt, und geben Sie ein Intervall der Länge 1 an, in dem diese liegt.

2. a) Bestimmen Sie den Real– und den Imaginärteil sowie den Betrag der komplexen Zahl $z = (-1+i)^{18}$.

   b) Zeigen Sie, daß alle Nullstellen der Funktion $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bereits in $\mathbb{R}$ liegen.

3. a) Zeigen Sie, daß für jede positive reelle Zahl a die Funktion
$$f_a : [a, \infty) \to \mathbb{R},\ f_a(x) = \cos \frac{1}{x}$$
gleichmäßig stetig ist.

   b) Zeigen Sie, daß die Funktion
$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos \frac{1}{x}$$
nicht gleichmäßig stetig ist.

4. Es seien a und b positive reelle Zahlen sowie
$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}.$$

   a) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

   b) Zeigen Sie, daß es ein $M > 0$ gibt, so daß $|f(x)| \leq M$ für alle $x > 0$ gilt.

5. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch
$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2+5}} \quad \text{und} \quad F(x) = 3\,\ln\left(x + \sqrt{x^2+5}\right)$$
definierten Funktionen.

   a) Zeigen Sie, daß F eine Stammfunktion von f ist, und bestimmen Sie
$$\int_0^4 |f(x) - 1|\, dx.$$

   b) Zeigen Sie, daß F streng monoton wachsend ist, und bestimmen Sie
$$(F^{-1})'(3 \ln 5).$$