MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. H. Kalf

WS 2002/03
1. Klausur
03.12.2002

Aufgaben der 1. Klausur zu MPIA

1. Sei
$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.
   a) Zeigen Sie $a_n = \dfrac{n+1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
   b) Zeigen Sie, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, und bestimmen Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N$.

2. Untersuchen Sie, ob für die Teilmenge
$$M = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{m+n}}{m\,n} \;\middle|\; m,\, n \in \mathbb{N} \right\}$$
der reellen Zahlen die Größen $\inf M$, $\sup M$, $\min M$ und $\max M$ existieren, und geben Sie diese gegebenfalls an.

3. Zeigen Sie, daß die Funktion
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|-2}, & \text{für } |x| > 2 \\ \frac{1}{2}\,x, & \text{für } |x| \le 2 \end{cases}$$
bijektiv ist, und geben Sie ihre Umkehrfunktion f^{-1} explizit an.

4. Durch $a_0 = 2$ und
$$a_{n+1} = 6\sqrt{a_n + 7} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$
wird rekursiv eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiert.
   a) Zeigen Sie $a_n < 100$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
   b) Zeigen Sie, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

5. Sei x eine reelle Zahl. Untersuchen Sie die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, x^n$$
in Abhängigkeit von x auf Konvergenz.