MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. O. Forster
Dr. P. Schuster

Wintersemester
2001/02

1.Klausur zur Vorlesung MPIA

am 7. Dezember 2001

1. Man beweise mit Hilfe vollständiger Induktion, dass
$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1} = \frac{2n}{n+1}$$
für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt.

2. Man bestimme (mit Beweis) das Produkt
$$\prod_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$$
d.h.: Man bestimme den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} p_n$ der Folge $p_n := \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1}$.
Hinweis: Man darf das Ergebnis von Aufgabe 1 verwenden.

3. Man bestimme (mit Beweis) den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ der Folge
$$a_n := \frac{(3n+1)(2n+1)}{n^2+3} \quad , \quad n \geq 1$$

4. Man zeige: Für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gilt
$$\frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2}$$

5. Man zeige, dass folgende unendliche Reihe konvergiert:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$
Hinweis: Man darf das Ergebnis von Aufgabe 4 verwenden.

6. Man beweise, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ folgende Reihe konvergiert:
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$$

7. Man beweise mit Hilfe vollständiger Induktion, dass
$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k-1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$
für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt.

(je 4 Punkte)

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Viel Erfolg !