Mathematisches Institut
Universität München

2. Klausur zu MIIIA, WS 03/04 (Hanke), am 10.2.04

- **Schreiben Sie unbedingt auf jedes Blatt Ihren Namen und lösen Sie jede Aufgabe nur auf dem dafür vorgesehenen Blatt.**
- **Arbeitszeit: 105 Minuten.**
- **Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen. Sie dürfen jedoch Resultate aus dem Vorlesungsskript ohne Beweis zitieren.**
- **Erlaubte Hilfsmittel: Mitschrift / Skript zur Vorlesung**
- **Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.**

Viel Erfolg!

Name:

1. Welche der folgenden Abbildungen sind alternierende Multilinearformen? Die Antworten sind zu begründen. (Jeweils 2 Punkte)

    i. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x.$

    ii. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 1.$

    iii. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = xy.$

    iv. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = xy - yx.$

Name:

2. Man drücke die folgenden Differentialformen als Linearkombination von Formen der Gestalt

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l}$$

aus, wobei $i_1 < \ldots < i_l$ und $x_1, x_2 \ldots$ die kartesischen Koordinaten auf $\mathbb{R}^n$ sind. (Jeweils 2 Punkte)

i. $f^*(\omega) \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$, $\omega := \cos(x_1)dx_1 \in \Omega^1(\mathbb{R})$, $f(x_1, x_2, x_3) := x_1 \cdot x_2$.

ii. $f^*(\omega) \in \Omega^2(\mathbb{R}^2), \omega := dx_2 \wedge dx_3 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3), f(x_1, x_2) = (\arctan x_1 \cdot e^{x_2}, 0, 1)$.

iii. $f^*(\omega) \in \Omega^2(\mathbb{R})$, $\omega := e^{x_2} dx_1 \wedge dx_2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$, $f(x_1) := (1, 1 - x_1)$.

iv. $d\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, $\omega := \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2} dx_1 + x_1 \cdot dx_3 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$.

Name:

3. Wir betrachten auf der Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ den durch stereographische Projektion gegebenen Atlas

$$\big((U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\big)$$

wobei

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{(x_1, x_2) \in S^1 \mid x_2 \neq -1\}\,, \\ U_2 &:= \{(x_1, x_2) \in S^1 \mid x_2 \neq +1\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, x_2) &:= \frac{x_1}{1 + x_2} \in \mathbb{R} \\ \phi_2(x_1, x_2) &:= \frac{x_1}{1 - x_2} \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

i. (4 Punkte) Ist dieser Atlas orientiert?

ii. (4 Punkte) Es sei $f : S^1 \to S^1$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)\,.$$

Offensichtlich induziert f eine Bijektion $U_1 \to U_2$. Man berechne die lokalen Darstellungen von f

$$\begin{aligned} \phi_2 \cdot f \circ (\phi_1)^{-1} &: \phi_1(U_1) \to \phi_2(U_2) \\ \phi_1 \cdot f \circ (\phi_2)^{-1} &: \phi_2(U_2) \to \phi_1(U_1) \end{aligned}$$

und begründe damit, dass f eine glatte Funktion $S^1 \to S^1$ definiert. (4 Punkte)

Name:

4. (8 Punkte)
Es sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine glatte injektive Abbildung, so dass $\frac{d}{dt}\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ ist dann $M := \gamma((a,b)) \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit.
Mithilfe der globalen Parameterdarstellung γ von M berechne man die Volumenform $\omega_{vol} \in \Omega^1(M)$ und zeige, dass

$$\int_M \omega_{vol} = \int_a^b \|\frac{d}{dt}\gamma(t)\| \, dt \,.$$