Mathematisches Institut
Universität München

MIII, WS 03/04, 2. Klausur

1. Welche der folgenden Abbildungen sind alternierende Multilinearformen? Die Antworten sind zu begründen. (Jeweils 2 Punkte)

i. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$.

ii. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 1$.

iii. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = xy$.

iv. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = xy - yx$.

Lösung:
i) f ist alternierende 1-Form, denn es ist linear.

ii) Wegen $f(x, y) \neq -f(y, x)$ ist f keine alternierende 2-Form.

iii) Wegen $f(1, 1) \neq -f(1, 1)$ ist f keine alternierende 2-Form.

iv) f ist alternierende 2-Form, denn es ist bilinear und $f(x, y) = -f(y, x)$ für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^2$.

2. Man drücke die folgenden Differentialformen als Linearkombination von Formen der Gestalt

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l}$$

aus, wobei $i_1 < \ldots < i_l$ und $x_1, x_2 \ldots$ die kartesischen Koordinaten auf $\mathbb{R}^n$ sind. (Jeweils 2 Punkte)

i. $f^*(\omega) \in \Omega^1(\mathbb{R}^3),\ \omega := \cos(x_1)dx_1 \in \Omega^1(\mathbb{R}),\ f(x_1, x_2, x_3) := x_1 \cdot x_2$.

ii. $f^*(\omega) \in \Omega^2(\mathbb{R}^2), \omega := dx_2 \wedge dx_3 \in \Omega^2(\mathbb{R}^3), f(x_1, x_2) = (\arctan x_1 \cdot e^{x_2}, 0, 1)$.

iii. $f^*(\omega) \in \Omega^2(\mathbb{R}),\ \omega := e^{x_2}dx_1 \wedge dx_2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^2),\ f(x_1) := (1, 1 - x_1)$.

iv. $d\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3),\ \omega := \frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}dx_1 + x_1 \cdot dx_3 \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$.

Lösung:
i) $f^*(\cos x_1 dx_1) = \cos f df = \cos(x_1 x_2)(x_1 dx_2 + x_2 dx_1)$
$= (x_2 \cos(x_1 x_2)) dx_1 + (x_1 \cos(x_1 x_2)) dx_2$.

ii) Wegen $df_2 = 0$ und $df_3 = 0$ ist $f^*(dx_2 dx_3) = df_2 df_3 = 0$.

iii) Wegen $df_1 = 0$ ist $f^*(e^{x_2} dx_1 dx_2) = e^{f_2} df_1 df_2 = 0$.

iv) $d\omega = \frac{2x_2}{\left(1+x_1^2+x_2^2\right)^2} dx_1 dx_2 + dx_1 dx_3$.

3. Wir betrachten auf der Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ den durch stereographische Projektion gegebenen Atlas

$$\big((U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\big)$$

wobei

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{(x_1, x_2) \in S^1 \mid x_2 \neq -1\}, \\ U_2 &:= \{(x_1, x_2) \in S^1 \mid x_2 \neq +1\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, x_2) &:= \frac{x_1}{1+x_2} \in \mathbb{R} \\ \phi_2(x_1, x_2) &:= \frac{x_1}{1-x_2} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

i. (4 Punkte) Ist dieser Atlas orientiert?

ii. (4 Punkte) Es sei $f : S^1 \to S^1$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2).$$

Offensichtlich induziert f eine Bijektion $U_1 \to U_2$. Man berechne die lokalen Darstellungen von f

$$\begin{aligned} \phi_2 \cdot f \circ (\phi_1)^{-1} &: \phi_1(U_1) \to \phi_2(U_2) \\ \phi_1 \cdot f \circ (\phi_2)^{-1} &: \phi_2(U_2) \to \phi_1(U_1) \end{aligned}$$

und begründe damit, dass f eine glatte Funktion $S^1 \to S^1$ definiert. (4 Punkte)

Lösung:
i) Aus $y = \phi_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1+x_2}$ folgt $x_1 = y(1+x_2)$, zusammen mit $x_1^2 + x_2^2 = 1$ also die quadratische Gleichung $x_2^2 + y^2(1+x_2)^2 = 1$ bzw. $x_2^2\left(1+y^2\right) + 2x_2y^2 + y^2 - 1 = 0$. Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man $x_2 = -\frac{y^2}{1+y^2} \pm \sqrt{\frac{y^4}{(1+y^2)^2} + \frac{1-y^2}{1+y^2}} = \frac{1}{1+y^2}\left\{-y^2 \pm \sqrt{y^4 + (1-y^2)(1+y^2)}\right\} = \frac{-y^2 \pm 1}{1+y^2}$. Wegen $x_2 \neq -1$ folgt $x_2 = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ und damit $x_1 = y(1+x_2) = \frac{2y}{1+y^2}$. Also ist

$$\phi_1^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right).$$

Analog berechnet man $\phi_2^{-1}(y) = \left(\frac{2y}{y^2+1}, \frac{y^2-1}{y^2+1}\right)$.
Für den Kartenübergang erhalten wir $\phi_2\phi_1^{-1}(y) = \phi_2\left(\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right) = \frac{\frac{2y}{1+y^2}}{1-\frac{1-y^2}{1+y^2}} = \frac{2y}{1+y^2-1+y^2} = \frac{1}{y}$. Die Jacobimatrix ist $D\left(\phi_2\phi_1^{-1}\right)_y = -\frac{1}{y^2} < 0$. Also ist der Atlas nicht orientiert.

ii) Es ist $\phi_2 f \phi_1^{-1}(y) = \phi_2\left(-\frac{2y}{1+y^2}, -\frac{1-y^2}{1+y^2}\right) = \frac{\frac{-2y}{1+y^2}}{1+\frac{1-y^2}{1+y^2}} = -y$ und $\phi_1 f \phi_2^{-1}(y) = \phi_1\left(-\frac{2y}{1+y^2}, \frac{1-y^2}{1+y^2}\right) = \frac{\frac{-2y}{1+y^2}}{1+\frac{1-y^2}{1+y^2}} = -y$. Also sind $\phi_2 f \phi_1^{-1}$ und $\phi_1 f \phi_2^{-1}$ differenzierbar. Das bedeutet nach Definition, dass f differenzierbar ist.

4. (8 Punkte)
Es sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine glatte injektive Abbildung, so dass $\frac{d}{dt}\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist.
Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ ist dann $M := \gamma((a,b)) \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Mithilfe der globalen Parameterdarstellung γ von M berechne man die Volumenform $\omega_{vol} \in \Omega^1(M)$ und zeige, dass

$$\int_M \omega_{vol} = \int_a^b \|\frac{d}{dt}\gamma(t)\| dt\,.$$

Lösung:
Die Karte (M, γ^{-1}) ist bereits ein Atlas für M. Nach Definition erhalten wir die Volumenform durch

$$\gamma^* \omega_{vol} = \sqrt{det\left(D\gamma^T D\gamma\right)} dt.$$

Weil die Determinante einer 1x1-Matrix natürlich die Zahl selbst ist, erhalten wir $\gamma^*\omega_{vol} = \sqrt{\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)^2} dt = \|\frac{d}{dt}\gamma(t)\| dt$. Damit ist

$$vol_1(M) = \int_M \omega_{vol} = \int_a^b \gamma^*\omega_{vol} = \int_a^b \|\frac{d}{dt}\gamma(t)\| dt.$$