Mathematisches Institut
Universität München

1. Klausur zu MIIIA, WS 03/04 (Hanke), am 5.12.03

1. Sei $K \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Teilmenge. Zeigen Sie:

(a) K ist messbar und hat endliches Mass. (2 Punkte)

(b) Ist $f : K \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so ist f messbar. (1 Punkt)

(c) Ist $f : K \to \mathbb{R}$ eine messbare und beschränkte Funktion, so ist f integrierbar. (3 Punkte)

(d) Ist $vol_1(K) > 0$ und ist $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige integrierbare Funktion, die überall positiv ist, so gilt $\int_K f(x)\, dx > 0$. (2 Punkte)

2. Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (x_1, y_1)$ und (x_2, y_2).

(a) Was ist die geometrische Bedeutung der Bedingung $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$? Exakte Begründung nicht erforderlich. (1 Punkt)

(b) Es sei $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$.
Benutzen Sie die Transformationsformel, um

$$vol_2(K) = \frac{1}{2} \mid x_1y_2 - x_2y_1 \mid$$

zu zeigen. (5 Punkte)

(c) Gilt diese Formel auch, falls $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$? Begründung erforderlich. (2 Punkte)

3. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Die durch

$$F(x,y) := f(x)\, g(y)$$

definierte Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei integrierbar.

(a) Zeigen Sie:
Das Faltungsintegral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(y-x)\, dx$ existiert für fast alle $y \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Verwenden Sie die Substitution $p := x, q := y - x$. (3 Punkte)

(b) Wir definieren eine Funktion $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f * g(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(y-x)\, dx,$$

falls dieses Integral existiert, und $f * g\,(y) = 0$ sonst. Zeigen Sie: $f * g$ ist integrierbar und

$$\| f * g \|_{L^1} \leq \| f \|_{L^1} \cdot \| g \|_{L^1} .$$

(5 Punkte)

4. (a) Wir definieren eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f\,(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } x \neq 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \end{cases} .$$

Zeigen Sie, dass f integrierbar ist und bestimmen Sie $\int_0^1 f\,(x)\,dx$. (6 Punkte)

(b) Sei $K = \{x \in \mathbb{R}^3 : \| x \| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$.
Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_K \frac{1}{\sqrt{1 - \| x \|^2}} d^3x$$

existiert und bestimmen Sie seinen Wert. (2 Punkte)