Mathematisches Institut
Universität München

Aufgabe 1.

(a) χ_K ist integrierbar nach Prop. 1.6.

(b) Nach Prop. 4.2. sind integrierbare Funktionen messbar.

(c) Sei f beschränkt, d.h. es existiert $M \in \mathbb{R}$ mit $\mid f(x) \mid \leq M$ für alle $x \in K$. Also gilt

$$\mid f \mid \leq M\chi_K.$$

Weil K kompakt ist, ist χ_K integrierbar nach Prop. 1.6. Nach Prop. 1.7. ist dann auch $M\chi_K$ integrierbar. Weil f messbar ist, folgt nun aus Prop. 4.2., dass f integrierbar ist.

(d) Weil f stetig ist, nimmt es auf der kompakten Menge K ein Minimum an, d.h. es existiert $x_0 \in K$ mit $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in K$.

Mit der Monotonie des Lebesgue-Integrals (Prop. 1.7.) folgt:

$$\int_K f(x)\,dx \geq \int_K f(x_0)\,dx = f(x_0)\,vol_1(K).$$

Wegen $f(x_0) > 0$ und $vol_1(K) > 0$ folgt $\int_K f(x)\,dx > 0$.
(Statt dieses Beweises kann man auch die aus der Vorlesung bekannte Tatsache $\int \mid f \mid = 0 \Longrightarrow f = 0$ f. ü. benutzen.)

Aufgabe 2.

(a) $x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ gilt genau dann, wenn die drei Punkte $(0,0), (x_1, y_1)$ und (x_2, y_2) auf einer Geraden liegen.

(b) Sei K_0 das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0)$ und $(0,1)$. Dann gilt $vol_2(K_0) = \int_0^1 1 - x\ dx = \frac{1}{2}$. (Dies folgt natürlich auch aus der bekannten Flächeninhaltsformel für rechtwinklige Dreiecke.) Wir betrachten nun die lineare Transformation

$$A := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $A(0,0) = (0,0), A(1,0) = (x_1, y_1)$ und $A(0,1) = (x_2, y_2)$. A bildet also K_0 auf K ab. Nach Annahme ist $det(A) = x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$, also ist A invertierbar. Damit ist A also ein Diffeomorphismus, es ist $DA(x,y) = A$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mit der Transformationsformel bekommen wir nun

$$vol_2(K) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_K dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \mid det(A) \mid \chi_{K_0} dxdy = \mid det(A) \mid vol_2(K_0) = \frac{1}{2} \mid x_1y_2 - x_2y_1 \mid.$$

(c) Wenn die drei Punkte auf einer Geraden liegen, ist $vol_2(K) = 0$. Die Formel stimmt also auch in diesem Fall.

Aufgabe 3.

(a) Die lineare Transformation

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

bildet (x,y) in $(x,y-x)$ ab und hat Determinante 1. Weil $f(x)\,g(y)$ integrierbar ist, ist also nach Satz 3.1. auch $H(x,y) := f(x)\,g(y-x)$ integrierbar. Aus dem Satz von Fubini folgt nun, dass das Integral $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(y-x)$ für fast alle $y \in \mathbb{R}$ existiert.

(b) Nach Satz 2.9. ist $f * g$ integrierbar.
Für alle $y \in \mathbb{R}$ ist $\mid f * g(y) \mid \leq \mid \int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(y-x)\,dx \mid$ (denn wenn das Integral nicht existiert, ist $f * g(y) = 0$, womit die Ungleichung ebenfalls gilt), also ist

$$\| f * g \|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} \mid f * g(y) \mid dy \leq \int_{\mathbb{R}} \mid \int_{\mathbb{R}} f(x)\,g(y-x)\,dx \mid dy$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mid f(x) \mid . \mid g(y-x) \mid dxdy.$$

(Man hätte hier auch benutzen können, dass das Integral vom Funktionswert auf Nullmengen unabhängig ist, womit man dann in der ersten Ungleichung sogar Gleichheit erhält.)

Wir wenden nun wieder die lineare Transformation $(x,y) \to (x,y-x)$ an. Weil die Determinante 1 ist, erhalten wir aus der Transformationsformel

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mid f(x) \mid . \mid g(y-x) \mid dxdy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mid f(x) \mid . \mid g(y) \mid dxdy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \mid f(x) \mid dx \int_{\mathbb{R}} \mid g(y) \mid dy = \| f \|_{L^1} \| g \|_{L^1} .$$

Aufgabe 4.

(a) Sei $f_\nu := f\ \chi_{[0,1-\frac{1}{\nu}]}$. Die f_ν sind eine monoton wachsende Funktionenfolge (weil f nur positive Werte annimmt) und sie konvergieren gegen f. Die f_ν sind stetig, also integrierbar. Mit der Substitution $x = \sin\theta$ sehen wir

$$\int_0^1 f_\nu(x)\,d^3x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos\theta} \sin^2\theta \cos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta.$$

Mit partieller Integration sehen wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = [-\sin\theta\cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta,$$

woraus $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{4}$ folgt.

Also ist $\int_0^1 f_\nu(x)\,d^3x \leq \frac{\pi}{4}$. Mit dem Satz von B. Levi folgt nun, dass auch $f = \lim_{\nu\to\infty} f_\nu$ integrierbar ist und es ist

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\nu\to\infty} \int_0^1 f_\nu(x)\,dx.$$

Sei $\theta_\nu := \arcsin\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)$. Dann ist

$$\int_0^1 f_\nu(x)\,dx = \int_0^{\theta_\nu} \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{4} - \int_{\theta_\nu}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta.$$

Wegen $0 \leq \sin^2 \theta \leq 1$ ist

$$0 \leq \lim_{\nu \to \infty} \int_{\theta_\nu}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta \leq \lim_{\nu \to \infty} \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = 0,$$

also

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{\nu \to \infty} \int_0^1 f_\nu (x)\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

(Anstatt mit dem Satz von B. Levi zu argumentieren, kann man auch benutzen, dass nach Prop. 2.6.c) die Lebesgue-Integrierbarkeit von f äquivalent zur uneigentlichen Riemann-Integrierbarkeit von $| f |= f$ ist, und dass ${}^R\!\int f = {}^L\!\int f$ gilt.)

(b) Wir betrachten zunächst $K_\nu = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \| x \| \leq 1 - \frac{1}{\nu}\right\}$ für $\nu \in \mathbb{N}$. Auf K_ν ist $\frac{1}{\sqrt{1-\|x\|^2}}$ definiert und stetig, also integrierbar. Mit Prop. 3.9. erhalten wir

$$\int_{K_\nu} \frac{1}{\sqrt{1- \| x \|^2}} d^3x = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^{1-\frac{1}{\nu}} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r^2\, dr.$$

(Wir bemerken, dass $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, also $\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = 4\pi$.)

Mit Aufgabe a) wissen wir, dass die rechte Seite beschränkt ist und für $\nu \to \infty$ gegen π^2 konvergiert. Also ist nach dem Satz von B.Levi

$$\int_K f(x)\, d^3x = \lim_{\nu \to \infty} \int_K f(x)\, \chi_{K_\nu}(x)\, d^3x = \pi^2.$$

(Auch hier kann man statt des Satzes von B. Levi auch Prop. 2.6.c) benutzen.)