MIIA, SS 03

2. Klausur

Aufgabe 1 (4P). Finde alle lokalen Maxima und Minima der Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) := x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $x^4 + y^4 = 1$.

Aufgabe 2 (4P). Bestimme (mit Lösungsweg!) die Lösung $x : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ der linearen Differentialgleichung $x' + x/t = \cos t$ mit Anfangsbedingung $x(\pi) = 0$.

Aufgabe 3. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Beweise: Die Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y)(x + 2y) = a\}$

(a)(2P) ist für $a \neq 0$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$;

(b)(2P) ist für $a = 0$ keine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4. Betrachte die Vektorfelder $v(x, y) := (0, x)$ und $w(x, y) := (-y, 0)$ in der Ebene. Beweise oder widerlege (je 1P):

(a) v ist ein Gradientenfeld;

(b) für jede stetig differenzierbare Kurve γ in der Ebene gilt $\int_\gamma v = \int_\gamma w$;

(c) für jede *geschlossene* stetig differenzierbare Kurve γ in der Ebene gilt $\int_\gamma v = \int_\gamma w$;

(d) der Index von v über jede geschlossene Kurve in der rechten Halbebene $\{(x, y) \mid x > 0\}$ ist Null.

Aufgabe 5. (a)(1P) Skizziere das Vektorfeld $v(x, y) = (x^3, -y^3)$.

(b)(3P) Berechne den Index von v am Punkt $(0, 0)$. *Tip:* Homotopiere v zu dem Vektorfeld $(x, -y)$.