Lösung der 2. Klausur

Aufgabe 1. An einem lokalen Minimum muss gelten:

$$(2x, 2y) = \mathrm{grad} h(x, y) = \lambda\, \mathrm{grad}(x^4 + y^4) = (4x^3, 4y^3)$$

mit einem geeigneten $\lambda \in \mathbb{R}$. Falls x und y beide $\neq 0$ sind, folgt daraus $x = \pm y$. Mit $x^4 + y^4 = 1$ liefert dies 4 Kandidaten für lokale Extrema $(\pm 1/\sqrt[4]{2}, \pm 1/\sqrt[4]{2})$. Der Wert von h an diesen Punkten ist $\sqrt{2}$. Weitere Kandidaten für lokale Extrema sind die Punkte, an denen eine Koordinate Null ist, d.h. die 4 Punkte $(\pm 1, 0)$ und $(0, \pm 1)$. Der Wert von h an diesen Punkten ist 1. Die Funktion h nimmt auf den so gefundenen 8 Punkten entlang der eindimensionalen Untermannigfaltigkeit $\{x^4 + y^4 = 1\}$ abwechselnd die Werte $\sqrt{2}$ und 1 an, und es gibt keine lokalen Extrema außer diesen Punkten. Daraus folgt, dass die Punkte $(\pm 1/\sqrt[4]{2}, \pm 1/\sqrt[4]{2})$ die lokalen Maxima und die Punkte $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ die lokalen Minima von h unter der Nebenbedingung $x^4 + y^4 = 1$ sind.

Aufgabe 2. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $x' + x/t = 0$ ergibt sich durch Separation der Variablen zu c/t, $t > 0$, $c \in \mathbb{R}$. Eine Lösung der inhomogenen Diffrerentialgleichung bestimmen wir mit Variation der Konstanten, d.h. mit dem Ansatz $x(t) = c(t)/t$. Einsetzen führt auf die Gleichung $c'(t) = t \cos t$. Integration liefert eine Lösung $c(t) = t \sin t + \cos t$, d.h. eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $x(t) = \sin t + \cos t/t$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also $x(t) = \sin t + \cos t/t + c/t$, $t > 0$, $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt die Lösung $x(t) = \sin t + \cos t/t + 1/t$.

Aufgabe 3. (a) Die Menge M ist die Nullstellenmenge der Funktion

$$F(x, y) = (x + y)(x + 2y) - a\,.$$

Die Gleichung $DF(x, y) = (2x + 3y, 3x + 4y) = (0, 0)$ hat die einzige Lösung $(x, y) = (0, 0)$. Für $a \neq 0$ gehört der Punkt $(0, 0)$ aber nicht zur Menge M. Also ist $DF(x, y)$ surjektiv für alle $(x, y) \in M$. Nach einem Satz der Vorlesung ist daher M eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit der $\mathbb{R}^2$.

(b) Für $a = 0$ ist die Menge M die Vereinigung der beiden Geraden $\{x+y = 0\}$ und $\{x + 2y = 0\}$. Die Geraden schneiden sich im Punkt $(0, 0)$. Für jede offene Umgebung U von $(0, 0)$ gilt: Zu jedem hinreichend kleinen $x \neq 0$ gibt es zwei verschiedene y (nämlich $y = -x$ und $y = -x/2$) mit $(x, y) \in M$. Also ist $M \cap U$ kein Graph über der x-Achse. Ein analoges Argument zeigt, dass $M \cap U$ kein Graph über der y-Achse ist. Nach Definition ist dann M keine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4. (a) Die Rotation von v ist $\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(0) = 1 \neq 0$, also ist v kein Gradientenfeld.

(b) Die Kurvenintegrale von v und w über die Kurve $\gamma(t) := (1, t)$ sind

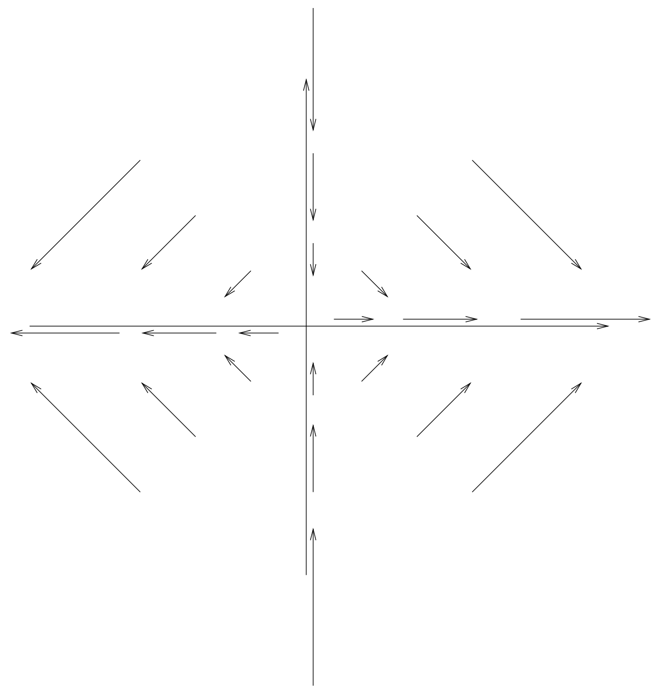
$$\int_\gamma v = \int_\gamma x\, dy = \int_0^1 dt = 1, \qquad \int_\gamma w = \int_\gamma (-y\, dx) = 0.$$

Sie sind also nicht gleich.

(c) Es gilt $(v - w)(x, y) = (y, x) = \operatorname{grad} f(x, y)$ mit $f(x, y) = xy$. Für jede geschlossene Kurve γ gilt: $\int_\gamma v - \int_\gamma w = \int_\gamma \operatorname{grad} f = 0$. Also sind die Kurvenintegrale von v und w über jede geschlossene Kurve gleich.

(d) Sei γ eine geschlossene Kurve in der rechten Halbebene $\{x > 0\}$. Intuitiv ist der Index von v über γ Null, weil v entlang γ immer in die positive y-Richtung zeigt, also gar nicht rotiert. Zum Beweis homotopiere v via $V(t, x, y) = \big(0, t + (1 - t)x\big)$ zu dem konstanten Vektorfeld $v_1(x, y) = (0, 1)$. Da $V(t, x, y)$ entlang γ nie Null wird, ändert dies den Index nicht. Der Index jedes konstanten Vektorfeldes ist aber Null (denn die Definition involviert Ableitungen des Vektorfeldes).

Aufgabe 5. (a)



(b) Betrachte die Homotopie $V(t,x,y) := \big(tx + (1-t)x^3, -ty - (1-t)y^3\big)$, $0 \leq t \leq 1$, von v zu dem Vektorfeld $v_1(x,y) = (x,-y)$. Da $V(t,x,y)$ für $(x,y) \neq (0,0)$ nie Null wird, ändert die Homotopie den Index am Punkt $(0,0)$ nicht. Zur Berechnung des Index von v_1 betrachte den Kreis $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, um $(0,0)$. Es gilt $v_1 \circ \gamma(t) = (\cos t, -\sin t)$, und daher nach Definition

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}\big(v_1,(0,0)\big) &= \frac{1}{2\pi}\int_{v_1\circ\gamma} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos t(-\cos t) - (-\sin t)(-\sin t)}{1}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-1)dt = -1.
\end{aligned}$$

Also ist der Index von v am Punkt $(0,0)$ gleich -1.