MIIA, SS 03

1. Klausur

Aufgabe 1. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := (x - y^2)x$.

(a) Berechne den Gradienten und die Hesse-Matrix von f im Punkt $(0, 0)$.

(b) Zeige, dass f im Punkt $(0, 0)$ kein lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 2. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeige: f ist an der Stelle $(0, 0)$ total differenzierbar.

(b) Berechne die Richtungsableitung von f an der Stelle $(0, 0)$ in Richtung $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Aufgabe 3. (a) Zeige: $d(x, y) := |\arctan x - \arctan y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$ definiert eine Metrik d auf $\mathbb{R}$.

(b) Zeige: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, d)$, besitzt aber keinen Grenzwert in $(\mathbb{R}, d)$.

Aufgabe 4. Betrachte den Raum $C^0[0, 1]$ der stetig differenzierbaren Funktionen $f : [0, 1]$ mit der Supremumsnorm $\|f\| := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Zeige, dass der abgeschlossene Einheitsball $\bar{B} := \{f \in C^0[0, 1] \mid \|f\| \leq 1\}$ in diesem Raum nicht kompakt ist.

Aufgabe 5. Sei $(V, \| \|)$ ein normierter Vektorraum. Zeige, dass der Rand des Einheitsballes $B := \{x \in V \mid \|v\| < 1\}$ die Einheitssphäre $S := \{x \in V \mid \|v\| = 1\}$ ist.