MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. H.-J. Schneider

WS 2003/04
30.01.2004

Klausur zur Vorlesung Algebra I

Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten.
Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Tutorgruppe!

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Zeige: Das Polynom $f := X^4 + 2X^3 - X^2 + 5X - 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.
(Hinweis: Rechne mod 2)

Aufgabe 2: *(2 + 4 Punkte)*
Seien $\zeta_{25} := e^{\frac{2\pi i}{25}}$ die 25. Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ und $f := X^7 + 6X^4 - 9X + 21 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeige:

a) Das Polynom f ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

b) Das Polynom f ist irreduzibel in $\mathbb{Q}(\zeta_{25})[X]$. *(Hinweis: Gradsatz)*

Aufgabe 3: *(4 + 2 Punkte)*

a) Zeige: Es gibt einen Ringisomorphismus $\mathbb{Z}/(50) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[i]/(1 + 7i)$.

b) Zeige: Die Einheitengruppe $U(\mathbb{Z}[i]/(1 + 7i))$ besitzt genau 20 Elemente.

Aufgabe 4: *(3 + 3 Punkte)*
Seien R ein faktorieller Ring und $p \in R$ ein irreduzibles Element.
Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) $(p) \in \operatorname{Spec}(R)$.

b) $(p) \in \operatorname{Max}(R)$.

Aufgabe 5: *(3 + 3 Punkte)*

a) Zeige: Jeder Integritätsring, der nur endlich viele Elemente besitzt, ist ein Körper.

b) Gibt es einen Integritätsring mit 12 Elementen?

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*
Sei G eine Gruppe mit $|G| = p^n$, p Primzahl, $n \geq 1$.
Zeige, dass ein $x \in G$ mit $\operatorname{ord}(x) = p$ existiert, so dass $\forall\ g \in G\ : gx = xg$.

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe: *(1 + 2 + 3 Punkte)*

Seien R ein kommutativer Ring und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge.
Sei M ein R-Modul.

a) Zeige, dass für jeden R-Modul N gilt:
$f : N \longrightarrow M$ Monomorphismus $\Longrightarrow f_S : N_S \longrightarrow M_S$ Monomorphismus.

b) Sei $U \subset M$ ein Untermodul von M. Dann kann $U_S \subset M_S$ nach a) als Untermodul von M_S aufgefasst werden.
Zeige: $M_S/U_S \cong (M/U)_S$.

c) Zeige, dass für jeden Untermodul $U \subset M$ gilt: $U = M \Longleftrightarrow \forall\, P \in \mathrm{Spec}(R) : U_P = M_P$.