MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
W. Zimmermann

Wintersemester 2002/03

Übungen zur Linearen Algebra I (MIB) — 2. Klausur

1. Man entscheide, für welche Primzahlen p die Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
in ${\mathbb{Z}_p}^{3,3}$ äquivalent zur Einheitsmatrix ist.

2. Es seien $w_1 = u_1 + iv_1$ und $w_2 = u_2 + iv_2$ komplexe Zahlen. Man bestimme die darstellende Matrix des Endomorphismus
$$m : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad (z_1, z_2) \mapsto (z_1 w_1, z_2 w_2),$$
und zwar
   (a) bezüglich der Basis $((1,0),(0,1))$ von $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum, sowie
   (b) bezüglich der Basis $((1,0),(i,0),(0,1),(0,i))$ von $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis $(v_1, \ldots, v_5)$. Für den durch
$$s(v_j) = \sum_{i=1}^{5} (i + j - 1) v_i \quad (1 \le j \le 5)$$
definierten Endomorphismus $s : V \to V$ bestimme man
   (a) die darstellende Matrix von s bezüglich der Basis $(v_1, \ldots, v_5)$ und
   (b) die Dimensionen von $\mathrm{Im}(s)$ und $\mathrm{Ker}(s)$.

4. Es seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K, sowie $g : U \to V$ und $h : V \to W$ Abbildungen, die nicht unbedingt K-linear sein müssen. Man zeige:
   (a) Ist $h \circ g$ ein Homomorphismus und g ein Epimorphismus, so ist h ein Homomorphismus.
   (b) Sind g und h Homomorphismen, so gilt
$$\mathrm{rg}(h \circ g) = \mathrm{rg}(g) - \dim(\mathrm{Ker}(h) \cap \mathrm{Im}(g)) .$$

5. Man betrachte
$$f : \mathbb{R}^{3,1} \to \mathbb{R}^{3,1}, \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 + 2\xi_3 \\ \xi_1 + \xi_2 + t\xi_3 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$
   (a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist f ein Isomorphismus? Für jedes solche t bestimme man f^{-1}.
   (b) Man zeige: Ist f ein Isomorphismus, so hat f bezüglich der kanonischen Basis (e_1, e_2, e_3) dieselbe darstellende Matrix wie bezüglich der Basis $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$.

(je 4 Punkte)

Bearbeitungszeitraum: Freitag, 31. Januar 2003, 16.15–18.00 Uhr

Viel Erfolg!