MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
W. Zimmermann

Wintersemester
2002/03

Übungen zur Linearen Algebra I (MIB) — 1. Klausur

1. Es seien M und N Mengen sowie $f : M \to N$ eine Abbildung. Man zeige:

   (a) f ist genau dann surjektiv, wenn $\overset{-1}{f}(\{z\}) \neq \emptyset$ ist für alle $z \in N$.

   (b) Für alle $y_1, y_2 \in N$ mit $y_1 \neq y_2$ gilt $\overset{-1}{f}(\{y_1\}) \cap \overset{-1}{f}(\{y_2\}) = \emptyset$.

2. (a) Man bestimme die multiplikativen Inversen der Zahlen 3 und 6 im Körper $\mathbb{Z}_{11}$.

   (b) Hat der kommutative Ring $\mathbb{Z}_{10}$ Elemente a, b, für die zwar $a \neq 0$ und $b \neq 0$, aber dennoch $ab = 0$ ist?

3. Gibt es Untervektorräume U, W_1, W_2 des $\mathbb{R}^2$ mit

$$U + W_i = \mathbb{R}^2 \text{ und } U \cap W_i = 0 \text{ für } i = 1, 2\,,$$

   für die $W_1 \neq W_2$ gilt?

4. Mit $e_1, \ldots, e_n$ sei die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Man zeige für $n \geq 1$: Läßt man von den $n+1$ Vektoren

$$e_1, \ldots, e_n,\ e_1 + \ldots + e_n$$

   irgendeinen weg, so erhält man stets eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

5. Sind die Tripel komplexer Zahlen

$$v_1 = (i, 1, 0),\ \ v_2 = (0, 0, 1),\ \ v_3 = (-1, i, 0)$$

   als Vektoren im $\mathbb{C}^3$ linear unabhängig, wenn man den $\mathbb{C}^3$ als

   (a) $\mathbb{R}$-Vektorraum

   (b) $\mathbb{C}$-Vektorraum

   auffaßt?

(je 4 Punkte)

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Viel Erfolg!