AB Topologie
Prof. Bernhard Leeb Ph.D.
Stefan Friedl Ph.D.

Analysis I für Mathematiker und Wirtschaftsmathematiker (MIA)

2. Klausur am 7.2.2004

(1) (3 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $\lambda \in (0,1)$ mit $|a_n - a_{n+1}| \leq \lambda |a_{n-1} - a_n|$ für alle $n > 1$. Zeigen Sie, daß (a_n) konvergiert.

(2) (4 Punkte) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $f(0) = 1$.
  (a) Zeigen Sie, daß f ein Maximum annimmt.
  (b) Belegen Sie durch ein Beispiel, daß f nicht notwendigerweise ein Minimum annimmt.

(3) (4 Punkte) Zeigen Sie:
  (a) Die Funktion $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist nicht gleichmäßig stetig.
  (b) Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist gleichmäßig stetig.

(4) (3 Punkte) Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:
  (a) $501\,x^4 + x^2 + 7x$
  (b) $\frac{2x+3}{5x^2+7}$
  (c) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(5) (3 Punkte) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion, mit $g(x) = g(-x)$ für alle x. Zeigen Sie, daß $g'(0) = 0$ gilt.

(6) (3 Punkte) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Maxima und Minima der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h(x) = x(x-1)e^x$.

(7) (2 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe der Regel von L'Hospital die folgenden Grenzwerte:
  (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$
  (b) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$

(8) (4 Punkte)
  (a) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor die folgende Abschätzung für $x, h \in \mathbb{R}$:
$$\sin(x+h) = \sin x + h\cos x + r(x,h)$$
  mit
$$|r(x,h)| \leq \frac{1}{2}h^2.$$
  (b) Geben Sie für die auf $(-1,\infty)$ definierte Funktion $\phi(x) = \sqrt{1+x}$ das Taylorpolynom 2. Ordnung im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

(9) (4 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Integrale:
  (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$
  (b) $\int_0^b xe^{-x^2}\,dx$
  (c) $\int e^x \sin x\,dx$
  (d) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$