Lösungsskizze zur 2. Klausur.

(1) (3 Punkte) Es sei also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $\lambda \in (0,1)$ mit $|a_n - a_{n+1}| \leq \lambda |a_{n-1} - a_n|$ für alle $n > 1$.
Behauptung: (a_n) konvergiert.
Wir wollen zeigen, dass (a_n) eine Cauchy–Folge ist. Wir beobachten, dass für $k > m$ gilt

$$|a_{k+1} - a_k| = \lambda |a_k - a_{k-1}| = \cdots = \lambda^{k-m} |a_{m+1} - a_m|.$$

Es folgt für $n > m$, dass

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_{m+2} - a_{m+1}) + (a_{m+1} - a_m)| \leq \\ &\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_{m+2} - a_{m+1}| + |a_{m+1} - a_m| \leq \\ &\leq \lambda^{n-(m+1)} |a_{m+1} - a_m| + \lambda^{n-1-(m+1)} |a_{m+1} - a_m| + \cdots + \lambda |a_{m+1} - a_m| + |a_{m+1} - a_m| = \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-m-1} \lambda^i |a_{m+1} - a_m| \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\sum_{i=0}^{l} \lambda^i = \frac{1 - \lambda^{l+1}}{1 - \lambda}.$$

Wir erhalten also für $n > m$, dass

$$|a_n - a_m| \leq \frac{1 - \lambda^{n-m}}{1 - \lambda} |a_{m+1} - a_m| < \frac{1}{1-\lambda} |a_{m+1} - a_m| < \frac{1}{1-\lambda} \lambda^{m-1} |a_2 - a_1|$$

in der vorletzten Ungleichung haben wir verwendet, dass $\lambda \in (0,1)$.
Sei nun endlich $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{1-\lambda} \lambda^{N-1} |a_2 - a_1| < \epsilon,$$

denn $|\lambda| < 1$. Für $n, m \geq N$ folgt dann nach den obigen Berechnungen, dass

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{1-\lambda} \lambda^{m-1} |a_2 - a_1| \leq \frac{1}{1-\lambda} \lambda^{N-1} |a_2 - a_1| < \epsilon.$$

(2) (4 Punkte) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $f(0) = 1$.

(a) Behauptung: f nimmt ein Maximum an.
Da $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ folgt, dass es ein $C > 0$ gibt, so dass $|f(x)| < \frac{1}{2}$ für alle $x < -C$ und alle $x > C$. Da f stetig auf dem Intervall $[-C, C]$ ist, nimmt f auf dem Intervall $[-C, C]$ ein Maximum m an. Aus $f(0) = 1$ folgt $m \geq 1$. Dann ist aber m sogar das Maximum für f auf ganz $\mathbb{R}$, denn für $x < -C$ oder $x > C$ gilt $f(x) < \frac{1}{2} < 1 \leq m$.
Hinweis:
Die Funktion f ist nicht als differenzierbar vorr ausgesetzt. Insbesondere kann der Satz von Rolle nicht angewendet werden. Zudem folgt aus $f'(x_0) = 0$ nicht notwendigerweise, dass f ein Extremum in x_0 besitzt.

(b) Betrachte $f = \frac{1}{1+x^2}$. Dann gilt $f(0) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $f(x) > 0$ für alle x. Angenommen f nimmt ein Minimum an, dann existiert ein x_m, so dass $m = f(x_m) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es ist klar, dass $m > 0$. Nach der Definition von $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ folgt aber, dass es $x \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f(x) - 0| < \frac{m}{2}$. Also kann m kein Minimum sein.

(3) (4 Punkte) Zur Wiederholung: Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass aus $|x_1 - x_2| < \delta$ folgt, dass $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.

(a) Angenommen die Funktion $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig. Setze $\epsilon = 1$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass aus $|x_1 - x_2| < \delta$ folgt, dass $|\tan(x_1) - \tan(x_2)| < 1$. Setze $d = \frac{\delta}{2}$. Dann folgt aus $|x_1 - x_2| \leq d$, dass $|\tan(x_1) - \tan(x_2)| < 1$.

Die Idee ist zu zeigen, dass in diesem Fall $\tan : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ beschränkt sein muss, im Widerspruch zu $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$. Sei $x \in [kd, (k+1)d]$, dann

$$\begin{aligned}
&= |\tan(x) - \tan(0)| = \\
&= |(\tan(x) - \tan(x-d)) + (\tan(x-d) - \tan(x-2d)) + \cdots + (\tan(x-kd) - \tan(0))| \leq \\
&\leq |\tan(x) - \tan(x-d)| + |\tan(x-d) - \tan(x-2d)| + \cdots + |\tan(x-kd) - \tan(0)| \leq \\
&\leq k+1
\end{aligned}$$

Es ist klar, dass für jedes $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ gilt $x \in [kd, (k+1)d]$ für ein $k \leq K := \frac{\frac{\pi}{2}}{d}$. Insbesondere folgt für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, dass

$$f(x) \leq K + 1.$$

Also ist $\tan : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ beschränkt, im Widerspruch zu $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$.

(b) Behauptung: Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist gleichmäßig stetig. Es gibt dazu mindestens zwei verschiedene Lösungsmöglichkeiten:

(i) In der Vorlesung wurde bewiesen, dass aus $f'(x) < C$ für alle x folgt, dass $|f(a) - f(b)| < C(a-b)$ für alle a, b. Insbesondere ist f in diesem Lipschitzstetig, also auch gleichmäßig stetig. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $\arctan(x)'$ beschränkt auf $\mathbb{R}$ ist. Es ist

$$\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

für alle x. Damit ist bewiesen, dass $\arctan(x)$ gleichmäßig stetig ist auf $\mathbb{R}$.

(ii) Die Funktion $\arctan(x)$ ist streng monoton wachsend, denn $\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2} > 0$. Da $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ beschränkt und surjektiv ist, folgt, dass $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ und $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.
Sei nun $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $C > 0$, so dass $|\arctan(x) - \frac{\pi}{2}| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $x \geq C$ und $|\arctan(x) - (-\frac{\pi}{2})| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $x \leq -C$. Da $\arctan : [-C, C] \to \mathbb{R}$ stetig ist und $[-C, C]$ ein abgeschlossenes Intervall

ist, existiert ein $\tilde{\delta} > 0$, so dass aus $|x_1 - x_2| < \tilde{\delta}$ folgt, dass $|\arctan(x_1) - \arctan(x_2)| < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $x_1, x_2 \in [-C, C]$. Setze nun $\delta := \min\{\tilde{\delta}, C\}$.
Nun müssen wir zeigen, dass aus $|x_1 - x_2| < \delta$ folgt, dass $|\arctan(x_1) - \arctan(x_2)| < \epsilon$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten folgende Fälle:
(A) $x_1, x_2 \in [-C, C]$, dieser Fall ist klar.
(B) $x_1, x_2 \geq C$, dann gilt

$$\begin{aligned}
|\arctan(x_1) - \arctan(x_2)| &= |\arctan(x_1) - \tfrac{\pi}{2} - (\arctan(x_2) - \tfrac{\pi}{2})| \leq \\
&\leq |\arctan(x_1) - \tfrac{\pi}{2}| + |\arctan(x_2) - \tfrac{\pi}{2}| < \\
&< \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} < \epsilon
\end{aligned}$$

(C) $x_1, x_2 < C$, dieser Fall ist wie oben.
(D) $x_1 < C, x_2 \geq C$, dann gilt

$$\begin{aligned}
|\arctan(x_1) - \arctan(x_2)| &= |\arctan(x_1) - \arctan(C) - (\arctan(x_2) - \arctan(C))| \leq \\
&\leq |\arctan(x_1) - \arctan(C)| + |\arctan(x_2) - \arctan(C)| < \\
&< \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{2\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir das Ergebnis von Fall (2) verwendet.
(E) $x_1 \leq -C, x_2 > -C$. Dieser Fall ist wie der obige.
(F) $x_1 < -C, x_2 > C$, dieser Fall kann nicht eintreten, denn $\delta \leq C$.

(4) (3 Punkte)
(a) $(501\,x^4 + x^2 + 7x)' = 501 \cdot 4x^3 + 2x + 7 = 2004x^3 + 2x + 7$.
(b) $(\frac{2x+3}{5x^2+7})' = \frac{(5x^2+7)2-(2x+3)\cdot 10x}{(5x^2+7)^2}$.
(c) $(\ln(x + \sqrt{1+x^2}))' = \frac{1+2\frac{1}{2}x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}$.

(5) (3 Punkte) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion, mit $g(x) = g(-x)$ für alle x. Dann gilt $g'(x) = (g(-x))' = -g'(-x)$. Insbesondere gilt $g'(0) = -g'(0)$, also $g'(0) = 0$.

(6) (3 Punkte) Es ist $h'(x) = (x(x-1)e^x)' = (2x-1)e^x + x(x-1)e^x = (x^2+x-1)e^x$. Es ist $f'(x) = 0$ für $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Es gilt $f'(x) > 0$ für $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (x_1, x_2)$. Insbesondere ist $(x_1, f(x_1))$ ein lokales Maximum und $(x_2, f(x_2))$ ein lokales Minimum.

Es ist

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(x-1)}{e^{-x}} = 0$$

nach l'Hospital. Ferner ist $\lim_{x\to\infty} x(x-1)e^x = \infty$. Da $f(x_2) < 0$ folgt, dass $(x_2, f(x_2))$ sogar das globale Minimum ist. Da $\lim_{x\to\infty} x(x-1)e^x = \infty$ folgt, dass kein globales Maximum existiert.

(7) (2 Punkte)
(a) $\lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x\to0} \frac{2\cos(2x)}{\cos(x)} = 2$.

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\tfrac{1}{\sin x}-\tfrac{1}{x}) &= \lim_{x\to 0}\tfrac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\tfrac{1-\cos(x)}{x\cos(x)+\sin(x)} = \\ &= \lim_{x\to 0}\tfrac{\sin(x)}{-x\sin(x)+\cos(x)+\cos(x)} = 0\end{aligned}$$

(8) (4 Punkte)

(a) Wir wenden den Satz von Taylor für $f(t)=\sin(t)$ am Punkt $x_0=x$ an. Es ist $T_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, hier also

$$T_1(x+h)=\sin(x)+\cos(x)(x+h-x)=\sin(x)+h\cos(x).$$

Nach dem Satz von Taylor existiert ein $\zeta\in[x,x+h]$, so dass

$$\sin(x+h)=T_1(x+h)+\frac{\sin^{(2)}(\zeta)}{2!}(x+h-x)^2=\sin(x)+h\cos(x)+\frac{-\sin(\zeta)}{2}h^2.$$

Es gilt dann für $r(x,h):=\sin(x+h)-T_1(x+h)$, dass

$$|r(x,h)|=|\frac{-\cos(\zeta)}{2}h^2|\leq\frac{1}{2}h^2.$$

(b) Wir berechnen

$$\phi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}},\quad \phi''(x)=\frac{-1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

also $\phi(0)=1,\phi'(0)=\frac{1}{2},\phi''(0)=-\frac{1}{4}$. Es folgt

$$T_2(x)=\phi(0)+\phi'(0)x+\frac{1}{2}\phi''(0)x^2=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}.$$

(9) (4 Punkte)

(a) Durch partielle Integration erhalten wir

$$\int x\cos x\,dx=x\sin(x)-\int\sin(x)\,dx=x\sin(x)+\cos(x),$$

also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=[x\sin(x)+\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

(b) Durch Substitution $u=-x^2$ erhalten wir

$$\int_0^{x=b}xe^{-x^2}dx=\int_0^{u=-b^2}-\frac{1}{2}e^u du=[-\frac{1}{2}e^u]_0^{-b^2}=-\frac{1}{2}e^{-b^2}+\frac{1}{2}.$$

(c) Durch zweifache partielle Integration erhalten wir

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin(x)-\int e^x\cos(x)=e^x\sin(x)-(e^x\cos(x)-\int e^x(-\sin(x))).$$

Also

$$\int e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}(e^x\sin(x)-e^x\cos(x)).$$

(d) Durch Substitution $u = x^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \int \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(u) = \frac{1}{2} \arcsin(x^2). \end{aligned}$$