AB Topologie
Prof. Bernhard Leeb Ph.D.
Stefan Friedl Ph.D.

Analysis I für Mathematiker und Wirtschaftsmathematiker (MIA)

1. Klausur am 20. 12. 2003

(1) (2 Punkte) Welche der beiden Zahlen ist größer?
 (a) $(3^4)^5$ oder $3^{(4^5)}$?
 (b) $\log_6 7$ oder $\log_7 6$?
 Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort.

(2) (3 Punkte) Zeigen Sie: Die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 9 teilbar.

(3) (3 Punkte) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.
 (a) $\max(a, b) = -\min(-a, -b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.
 (b) $\max(a^2, b^2) = (\max(a, b))^2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.
 (c) $\max(a^3, b^3) = (\max(a, b))^3$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

(4) (6 Punkte) Bestimmen Sie, ob die folgenden Folgen konvergieren, und ermitteln Sie im Konvergenzfall den Grenzwert.
 (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$
 (b) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1}$
 (c) $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n-1}{n+1}}$

(5) (3 Punkte) Es sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, daß $(a_n b_n)$ eine Nullfolge ist.

(6) (4 Punkte) Bestimmen Sie, welche der folgenden Reihen konvergieren:
 (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{13n+2}$
 (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$

(7) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+7}{2n+1}\right)^n z^n$.

(8) (3 Punkte) Es seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [b, c] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(b) = g(b)$, wobei $a < b < c$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$\begin{aligned} h : [a, c] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{, falls } a \le x \le b \\ g(x) & \text{, falls } b < x \le c \end{cases} \end{aligned}$$

 stetig ist.

(9) (3 Punkte) Zeigen Sie: Die Gleichung $x^x = 2$ besitzt eine Lösung in $\mathbb{R}^+$.

(10) (3 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Seien h_m für $m \in \mathbb{N}$ Häufungswerte dieser Folge. Weiterhin sei b ein Häufungswert der Folge $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie: b ist ebenfalls ein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.