Lösungsskizze zur 1. Klausur.

(1) (a) Es ist $(3^4)^5 = 3^{4 \cdot 5} = 3^{20} < 3^{(4^5)}$, da $20 < 4^5$ und $x \mapsto 3^x$ streng monoton steigend ist.

(b) Es ist $\log_6 7 > \log_6 6 = 1 = \log_7 7 > \log_7 6$. Hier haben wir verwendet, dass für jedes $b > 1$ die Funktion $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$ streng monoton steigend ist.

(2) Behauptung: Die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 9 teilbar.

Wir müssen also beweisen, dass $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ durch 9 teilbar ist für alle n. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n. Die Aussage ist klar für $n = 1$, denn $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$. Nehmen wir nun an, die Aussage ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 3 \cdot 3n^2 + 3 \cdot 9n + 3^3 = \\ &= (n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) + (9n^2 + 27n + 27)\end{aligned}$$

Der erste Term ist durch 9 teilbar nach Induktionsannahme. Der zweite Term ist offensichtlich durch 9 teilbar.

(3) (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. O. B. d. A. können wir annehmen, dass $a \geq b$. Dann folgt $-a \leq -b$, also

$$\max(a, b) = a = -(-a) = -\min(-a, -b)$$

(b) Es sei $a = -1$ und $b = -2$. Dann gilt

$$\max(a^2, b^2) = \max(1, 4) = 4 \neq 1 = (-1)^2 = (\max(a, b))^2$$

(c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. O. B. d. A. können wir annehmen, dass $a \geq b$. Dann gilt auch $a^3 \geq b^3$ wegen der Monotonie von $x \mapsto x^3$. Also

$$\max(a^3, b^3) = a^3 = (\max(a, b))^3$$

(4) (a) Setze $a_n := \frac{n!}{n^n}$. Dann gilt für $n \geq 1$, dass

$$0 \leq a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n}{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Nachdem die Folgen 0 und $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergieren, folgt aus dem Einschnürungsprinzip, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

(b) Behauptung: Die Folge $a_n := (-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1}$ besitzt zwei verschiedene Häufungswerte, insbesondere konvergiert die Folge nicht.

In der Tat, es ist

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} a_{2k} &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} \tfrac{(2k)^2-1}{(2k)^2+1} = \lim_{k\to\infty} \tfrac{(2k)^2-1}{(2k)^2+1} = 1 \\ \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{2k+1} \tfrac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2+1} = \lim_{k\to\infty} -\tfrac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2+1} = -1\end{aligned}$$

(c) Da $x \to e^x$ stetig ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n-1}{n+1}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1}} = e^1 = e$$

Hinweise zu häufigen Fehlern:

(a) Ist (a_n) eine monoton fallende Folge, durch 0 nach unten beschränkt, dann ist (a_n) nicht notwendigerweise eine Nullfolge. Beispielsweise konvergiert $a_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{2}$ gegen $\frac{1}{2}$.

(b) Die Schreibweise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n}$$

macht keinen Sinn, da die Zahl der Faktoren sich mit n verändert.

(c) Die Aussage $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$ macht nur Sinn, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n$ und $\lim_{n\to\infty} b_n$ konvergieren. Insbesondere kann man NICHT schreiben, dass

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} = (\lim_{n\to\infty} (-1)^n)(\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1})$$

(5) Es sei (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, d. h. es existiert ein $C > 0$ mit $|b_n| \leq C$ für alle n.
Behauptung: $(a_n b_n)$ ist eine Nullfolge.
Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein N, so dass $|a_n| < \frac{\epsilon}{C}$ für alle $n \geq N$. Dann gilt für $n \geq N$, dass

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq |a_n|C < \frac{\epsilon}{C}C = \epsilon$$

Hinweise:

(a) Die Aufgabe kann man auch sehr schön mit dem Einschnürungsprinzip bearbeiten, denn $-|a_n|C \leq a_n b_n \leq |a_n|C$.

(b) Bolzano–Weierstraß besagt, dass jede beschränkte Folge eine konvergente *Teilfolge* besitzt. Aber nicht jede beschränkte Folge muss notwendigerweise divergieren, z. B. konvergiert $(-1)^n$ nicht.

(6) (a) Es ist $13n + 2 < 15n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\frac{1}{13n+2} > \frac{1}{15n}$. Die Reihe $\frac{1}{15}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{15n}$ divergiert (siehe Vorlesung). Nach dem Majoranten–Kriterium divergiert dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{13n+2}$.

(b) Es ist $\frac{1}{n^2+\sqrt{n}} < \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert (siehe Vorlesung). Nach dem Majoranten–Kriterium konvergiert dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$.

Hinweis:
Gilt für eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dass $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, dann folgt nicht, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ notwendigerweise konvergiert. Beispielsweise konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(7) Wir verwenden das Cauchy–Hadamard–Kriterium. Es ist

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+7}{2n+1}\right)^n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{n+7}{2n+1}$$

Die Folge $\left(\frac{n+7}{2n+1}\right)$ konvergiert, insbesondere gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n+7}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+7}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Es folgt, dass $R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+7}{2n+1}\right)^n z^n$ ist.

(8) Es seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [b,c] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(b) = g(b)$, wobei $a < b < c$.

Behauptung: Die Funktion

$$\begin{aligned} h : [a,c] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{, falls } a \le x \le b \\ g(x) & \text{, falls } b < x \le c \end{cases} \end{aligned}$$

ist stetig.

Sei also $x_0 \in [a,c]$ und $\epsilon > 0$. Wir unterscheiden drei Fälle.

(a) Wenn $x_0 \in [a,b)$, dann existiert wegen der Stetigkeit von f ein $\delta_1 > 0$, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta_1$. Setze $\delta := \min\{b - x_0, \delta_1\}$. Sei nun $x \in [a,c]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Dann gilt insbesondere $x < x_0 + \delta \le x_0 + b - x_0 = b$, also $x \in [a,b]$. Da $h(x) = f(x)$ für alle $x \le b$, folgt $|h(x) - h(x_0)| < \epsilon$ da $|x - x_0| < \delta < \delta_1$.

(b) Wenn $x_0 \in (b,c]$, dann existiert wegen der Stetigkeit von f ein $\delta_1 > 0$, so dass $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $x \in [b,c]$ mit $|x - x_0| < \delta_1$. Setze $\delta := \min\{x_0 - b, \delta_1\}$. Sei nun $x \in [a,c]$ mit $|x - x_0| < \delta$. Dann gilt insbesondere $x > x_0 - \delta \ge x_0 - (x_0 - b) = b$, also $x \in [b,c]$. Da $h(x) = g(x)$ für alle $x \ge b$, folgt $|h(x) - h(x_0)| < \epsilon$ da $|x - x_0| < \delta < \delta_1$.

(c) Wenn $x_0 = b$, dann existiert wegen der Stetigkeit von f ein $\delta_1 > 0$, so dass $|f(x) - f(b)| < \epsilon$ für alle $x \in [a,b]$ mit $|x - b| < \delta_1$. Darüberhinaus existiert wegen der Stetigkeit von g ein $\delta_2 > 0$, so dass $|g(x) - g(b)| < \epsilon$ für alle $x \in [b,c]$ mit $|x - b| < \delta_2$. Setze $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Behauptung: Es ist $|h(x) - h(b)| < \epsilon$ für alle $x \in [a,c]$ mit $|x - b| < \delta$.

Beweis: Sei also $x \in [a,c]$ mit $|x - b| < \delta$. Wenn $x < b$, dann gilt

$$|h(x) - h(b)| = |f(x) - f(b)| < \epsilon$$

denn $|x - b| < \delta \le \delta_1$ und $x \in [a,b]$. Wenn $x > b$, dann gilt

$$|h(x) - h(b)| = |g(x) - g(b)| < \epsilon$$

denn $|x - b| < \delta \le \delta_2$ und $x \in [b,c]$.

Hinweis:

Diese Aufgabe ist subtiler als sie zu Beginn erscheint. Dies kann man schon an der Länge der obigen Lösung erkennen. Ist zum Beispiel $x_0 \in [a,b)$ und ist $\epsilon > 0$, dann existiert wegen der Stetigkeit von f ein $\delta_1 > 0$, so dass

$$|x_0 - x| < \delta_1 \text{ und } x \in [a,b) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Um die Stetigkeit von h in x_0 zu beweisen, brauchen wir jedoch ein $\delta > 0$, so dass

$$|x_0 - x| < \delta \text{ und } x \in [a, c) \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| < \epsilon$$

Die zweite Bedingung an x hat sich also geändert. Insbesondere kann es vorkommen, dass das δ_1 von f zu gross ist. Deswegen die Definition von δ als $\delta := \min\{\delta, b - x_0\}$. Denn dann folgt

$$|x_0 - x| < \delta \text{ und } x \in [a, c) \Rightarrow |x_0 - x| < \delta \text{ und } x \in [a, b) \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

(9) Behauptung: Die Gleichung $x^x = 2$ besitzt eine Lösung in $\mathbb{R}^+$.
Setze $f(x) = x^x - 2$. Diese Funktion ist stetig, denn $f(x) = x^x - 2 = e^{x \ln(x)} - 2$. Dann gilt $f(1) = -1$ und $f(2) = 2$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert dann ein $c \in [1, 2]$ mit $f(c) = 0$, denn $0 \in [f(1), f(2)] = [-1, 2]$. Aus $f(c) = 0$ folgt $c^c = 2$.
Hinweis:
Die Lösung c kann nicht explizit als geschlossener Ausdruck angegeben werden.

(10) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Seien h_m für $m \in \mathbb{N}$ Häufungswerte dieser Folge. Weiterhin sei b ein Häufungswert der Folge $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$.
Behauptung: b ist ebenfalls ein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sei $\epsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $|b - a_n| < \epsilon$. Da b Häufungswert der Folge $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist, gibt es ein m mit $|h_m - b| < \frac{\epsilon}{2}$. Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - h_m| < \frac{\epsilon}{2}$, da h_m ein Häufungswert der Folge (a_n) ist. Für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$|a_n - b| = |a_n - h_m + h_m - b| \leq |a_n - h_m| + |h_m - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$