Musterlösungen zur Klausur 1 - Ausweichtermin

Aufgabe 1 Sei M ein metrischer Raum mit Metrik d. Beweisen Sie für $w, x, y, z \in M$ die Vierecksungleichung
$$|d(w,x) - d(y,z)| \leq d(w,y) + d(x,z).$$

Lösung: Wir verwenden die Dreiecksungleichung für die Metrik
$$d(w,x) \leq d(w,y) + d(y,x).$$

Auf den zweiten Summanden auf der rechten Seite wenden wir nochmals die Dreiecksungleichung an und erhalten
$$d(w,x) \leq d(w,y) + d(y,z) + d(z,x) = d(w,y) + d(y,z) + d(x,z).$$

Im letzten Schritt haben wir die Symmetrie der Metrik beachtet. Es folgt
$$d(w,x) - d(y,z) \leq d(w,y) + d(x,z).$$

Mit denselben Rechnungen erhält man, wenn man mit $d(y,z)$ beginnt
$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) \leq d(y,w) + d(w,x) + d(x,z) = d(w,y) + d(w,x) + d(x,z)$$

und weiter
$$d(y,z) - d(w,x) \leq d(w,y) + d(x,z).$$

Hieraus folgt wegen $d(y,z) - d(w,x) = -(d(w,x) - d(y,z))$ zusammen mit dem ersten Teil die Behauptung.

Aufgabe 2 Sei $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Eigenschaften A als Teilmenge von $[0,1]$ hat.

a)	abgeschlossen	**c)**	beschränkt	**e)**	zusammenhängend
b)	offen	**d)**	kompakt	**f)**	dicht

Lösung:

a) A ist abgeschlossen; denn der einzige nicht triviale Häufungspunkt $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ gehört mit zu A.

b) A ist nicht offen; denn A enthält keine inneren Punkte. Beispielsweise enthält jede Kugel um $\frac{1}{2} \in A$ stets Punkte, die nicht in A liegen.

c) A ist beschränkt, da $A \subset [0,1]$ ist.

d) Die Menge A ist kompakt, da sie als Teilmenge von $\mathbb{R}$ beschränkt und abgeschlossen ist.

e) A ist nicht zusammenhängend; denn die Mengen $A_1 := \{\frac{1}{n} | n = 2, 3, \dots\} \cup \{0\}$ und $A_2 := \{1\}$ sind relativ offen bezüglich A, disjunkt und es gilt $A = A_1 \cup A_2$.

f) A ist nicht dicht in $[0,1]$, da beispielsweise der Punkt $2/3 \in [0,1]$ kein Häufungspunkt von A ist.

Aufgabe 3 Seien $a, b > 0$. Beweisen Sie die Ungleichung zwischen dem harmonischen und dem geometrischen Mittel:
$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$$

Wann steht das Gleichheitszeichen?

Hinweis: Gehen Sie aus von $(x-y)^2 \geq 0$ und wählen Sie x, y geeignet.

Lösung: Wir gehen aus von der Ungleichung $0 \leq (x-y)^2$ und wählen
$$x = \frac{1}{\sqrt{a}},\ y = \frac{1}{\sqrt{b}},$$

was wohldefiniert ist wegen $a, b > 0$. Damit folgt

$$0 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{1}{a} - \frac{2}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{b}.$$

Umformen liefert

$$\frac{2}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

und weiter

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$$

Das ist die gesuchte Ungleichung. Damit in dieser Ungleichung Gleichheit steht, muss in unseren gesamten Rechnungen ein Gleichheitszeichen vorkommen, insbesondere also in der allerersten Ungleichung. Das ist genau dann der Fall, wenn $x = y$ also $a = b$ ist.

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{in^2 + 2n + 3}{n^3 + 4n^2 + 5n + i}$ (Bem.: $i^2 = -1$)

b) $b_n = \dfrac{1}{1 + (-1)^n \frac{n}{n+1}}$.

c) $c_n = \sqrt{an+1} - \sqrt{bn}$, $a, b \geq 0$.

Lösung:

a) Wir formen die Folge zunächst um und wenden dann die Grenzwertsätze an

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{in^2 + 2n + 3}{n^3 + 4n^2 + 5n + i} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{i}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{i}{n^3}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{i}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^3}}{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{i}{n^3}} \\
&= \frac{0}{1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Die Folge konvergiert also und hat den Grenzwert 0.

b) Wir bringen die b_n vorab in eine andere Gestalt

$$b_n = \frac{1}{1 + (-1)^n \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+1+(-1)^n n}$$

und betrachten die Teilfolge für ungerade Indices $n = 2k + 1$

$$b_{2k+1} = \frac{2k+2}{2k+2-(2k+1)} = 2k + 2.$$

Das zeigt, dass die Folge unbeschränkt ist und somit nicht konvergieren kann.

c) Wir schreiben die c_n um, indem wir mit $\sqrt{an+1} + \sqrt{bn}$ erweitern und die dritte binomische Formel verwenden

$$c_n = \sqrt{an+1} - \sqrt{bn} = \frac{(a-b)n + 1}{\sqrt{an+1} + \sqrt{bn}}.$$

Falls $a = b$ ist, folgt hieraus sofort die Konvergenz

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{an+1} + \sqrt{an}} \to 0, \;\; n \to \infty.$$

Für $a \neq b$ divergiert der Ausdruck. Wir zeigen das zuerst für den Fall $a > b$, indem wir c_n nach unten abschätzen

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{(a-b)n+1}{\sqrt{an+1} + \sqrt{bn}} \geq \frac{(a-b)n}{\sqrt{an+1} + \sqrt{bn}} \\ &\geq \frac{(a-b)n}{\sqrt{an+1} + \sqrt{an}} \geq \frac{(a-b)n}{\sqrt{an+n} + \sqrt{an}} \\ &= \frac{a-b}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Da die Folge $(\sqrt{n})_{n=1}^{\infty}$ unbeschränkt ist, sehen wir, dass auch $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ unbeschränkt ist und daher nicht konvergieren kann.

Für $a < b$ betrachten wir von vornherein nur so große n, dass $\frac{(b-a)}{2} n - 1 \geq 0$ ist, und rechnen dann entsprechend

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{(b-a)n-1}{\sqrt{an+1} + \sqrt{bn}} \geq \frac{\frac{b-a}{2} n}{\sqrt{an+1} + \sqrt{bn}} \\ &\geq \frac{(b-a)n}{2(\sqrt{bn+1} + \sqrt{bn})} \geq \frac{(b-a)n}{2(\sqrt{bn+n} + \sqrt{bn})} \\ &= \frac{b-a}{2(\sqrt{b+1} + \sqrt{b})} \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Das zeigt wie oben die Unbeschränktheit und damit die Divergenz der Folge.

Aufgabe 5 Seien $C > 0$ und $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right].$$

Lösung: Zunächst müssen wir voraussetzen, dass $a_n > 0$ ist, weil andernfalls der Ausdruck keinen Sinn macht. Wir weisen nach, dass die Folge der Partialsummen

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right]$$

konvergiert. Dazu bemerken wir, dass aus $a_n \leq a_{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \geq 0$$

folgt und somit $s_N \leq s_{N+1}$ ist. Die Folge $(s_N)_{N=1}^{\infty}$ ist also monoton wachsend. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, dass die s_N beschränkt bleiben, um auf die Konvergenz zu schließen. Wir rechnen

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right] = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}.$$

Der Zähler ist nach Voraussetzung positiv und für den Nenner finden wir

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1 > 0.$$

Das bedeutet

$$s_N \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1} = \frac{1}{a_1} \sum_{n=1}^{N} (a_{n+1} - a_n) = \frac{1}{a_1}(a_{N+1} - a_1) \leq \frac{1}{a_1}(C - a_1).$$

Im letzten Schritt haben wir die Beschränktheit der a_n ausgenutzt. Das zeigt, dass die s_N beschränkt sind, und wir erhalten die Behauptung.

Aufgabe 6 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{n^2}}$, $x > 1$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 5.

Lösung:

a) Wir haben laut Übung $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1.$$

Die Reihenglieder bilden also keine Nullfolge. Somit kann die Reihe nicht konvergieren.

b) Wir verwenden das Wurzelkriterium

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{x^{n^2}}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{x}{x^n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0,$$

da $x > 1$ ist. Das zeigt die Konvergenz der Reihe.

c) Entfällt wegen fehlerhafter Aufgabenstellung.