Musterlösungen zur Klausur 1

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen konvex sind.

a) $\{x|x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \leq 1\}$

b) $\{x|x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \leq 1\}$

Lösung:

a) Zur Abkürzung sei $Q_1 := \{x|x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \leq 1\}$. Seien nun $x, y \in Q_1$. Wir zeigen, dass auch $z := \lambda x + (1-\lambda)y \in Q_1$ ist für $\lambda \in [0, 1]$. Dazu betrachten wir die Komponenten von z. Mit der Dreiecksungleichung folgt zunächst:

$$|z_j| = |\lambda x_j + (1-\lambda)y_j| \leq |\lambda x_j| + |(1-\lambda)y_j| = |\lambda||x_j| + |(1-\lambda)| \cdot |y_j|.$$

Wegen $x, y \in Q_1$ wissen wir, dass $|x_j| \leq 1$ und $|y_j| \leq 1$ ist. Also:

$$|z_j| \leq |\lambda| + |1-\lambda|.$$

Aus $\lambda \in [0, 1]$ folgt schließlich:

$$|z_j| \leq \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

Da dies für alle $j = 1, \dots, n$ gilt, schließen wir $\max\{|z_1|, \dots, |z_n|\} \leq 1$ und somit $z \in Q_1$. Das zeigt die Konvexität von Q_1.

b) Zur Abkürzung sei $Q_2 := \{x|x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{j=1}^{n} |x_j| \leq 1\}$. Seien $x, y \in Q_2$. Wir zeigen, dass dann auch $z := \lambda x + (1-\lambda)y \in Q_2$ ist für $\lambda \in [0, 1]$. Zunächst folgt mittels der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
s &:= \sum_{j=1}^{n} |z_j| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |(\lambda x_j + (1-\lambda)y_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} (|\lambda x_j| + |(1-\lambda)y_j|) \\
&= |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |x_j| + |1-\lambda| \sum_{j=1}^{n} |y_j| \\
&\leq |\lambda| + |1-\lambda|.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir $x, y \in Q_2$ ausgenutzt. Beachten wir nun noch $\lambda \in [0, 1]$, so folgt weiter:

$$s \leq \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

woraus wir $z \in Q_2$ folgern. Also ist Q_2 konvex.

Aufgabe 2 Sei M ein metrischer Raum mit Metrik d. Seien weiter $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in M, die gegen $x \in M$ konvergiert, und $y \in M$ beliebig. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y) = d(x, y)$ ist.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Ungleichung $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.

Lösung: Wir beweisen zunächst die angegebene Ungleichung. Ausgangspunkt ist die Dreiecksungleichung für die Metrik:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

für $x, y \in M$. Umformen liefert:

$$d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y).$$

Entsprechend finden wir:

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z).$$

Wieder liefert umformen:

$$d(y,z) - d(x,z) \leq d(y,x) = d(x,y).$$

Dabei haben wir die Symmetrie der Metrik verwendet. Vergleich der beiden Ungleichungen ergibt wegen

$$d(x,z) - d(y,z) = -(d(y,z) - d(x,z))$$

die behauptete Ungleichung.

Die Aussage erhalten wir nun wie folgt. Da die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen x konvergiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$d(x_n, x) \leq \varepsilon$$

ist für alle $n \geq N$. Aufgrund unserer Ungleichung erhalten wir

$$|d(x_n, y) - d(x,y)| \leq d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

Also ist $|d(x_n, y) - d(x,y)| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Das ist gerade die Konvergenz der Folge $(d(x_n, y))_{n=1}^{\infty}$ gegen $d(x,y)$.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{n^2 + 3in + 8}{2n^2 + 7n + 10i}$ (Bem.: $i^2 = -1$)

b) $b_n = \dfrac{1}{1 - \frac{n}{n+1}}$

c) $c_n = \dfrac{(-1)^n n^2 + 1}{n^2 + 2}$

Lösung:

a) Wir formen den Ausdruck für a_n zunächst um:

$$a_n = \frac{1 + \dfrac{3i}{n} + \dfrac{8}{n^2}}{2 + \dfrac{7}{n} + \dfrac{10i}{n^2}}$$

Die Folgen $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n^2}$ konvergieren beide gegen Null (die erste letztlich wegen der archimedischen Eigenschaft, die zweite wegen $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$), so dass wir die Grenzwertsätze verwenden dürfen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \dfrac{3i}{n} + \dfrac{8}{n^2}}{2 + \dfrac{7}{n} + \dfrac{10i}{n^2}} = \frac{1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3i}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8}{n^2}}{2 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10i}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

b) Wir schreiben den Ausdruck für b_n um:

$$b_n = \frac{1}{1 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+1-n} = n+1.$$

Die Folge ist also unbeschränkt und kann daher nicht konvergieren.

c) Wir betrachten die beiden Teilfolgen $(c_{2k})_{k=1}^{\infty}$ und $(c_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$. Wegen

$$c_{2k} = \frac{(-1)^{2k}4k^2+1}{4k^2+2} = \frac{4+\frac{1}{k^2}}{4+\frac{2}{k^2}}$$

können wir die Grenzwertsätze anwenden und finden

$$\lim_{k\to\infty} c_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{4+\frac{1}{k^2}}{4+\frac{2}{k^2}} = \frac{4+\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k^2}}{4+\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2}{k^2}} = \frac{4}{4} = 1.$$

Entsprechend ist

$$\lim_{k\to\infty} c_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{(-1)^{2k-1}(2k-1)^2+1}{(2k-1)^2+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{-4+\frac{4}{k}}{4-\frac{4}{k}+\frac{3}{k^2}} = \frac{-4+\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{4}{k}}{4-\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{4}{k}+\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{3}{k^2}} = \frac{-4}{4} = -1.$$

Die Folgen $(c_{2k})_{k=1}^{\infty}$ und $(c_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ haben also verschiedene Grenzwerte. Mithin hat die Folge $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ wenigstens zwei verschiedene Häufungspunkte und kann nicht konvergieren, da eine konvergente Folge genau einen Häufungspunkt besitzt, nämlich den Grenzwert.

Aufgabe 4 Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n \geq 0$, konvergiere gegen $a \geq 0$. Weisen Sie nach, dass $(\sqrt[3]{a_n+1})_{n=1}^{\infty}$ konvergiert. Wie lautet der Grenzwert?

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Formel $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$ und wählen dann x und y geeignet.

Lösung: Wir beweisen zunächst die angegebene Formel. Es ist:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3.$$

Hierin setzen wir nun $x = \sqrt[3]{a_n+1}$ und $y = \sqrt[3]{a+1}$ und erhalten:

$$((a_n+1)^{1/3} - (a+1)^{1/3})((a_n+1)^{2/3} + (a_n+1)^{1/3}(a+1)^{1/3} + (a+1)^{2/3}) = a_n + 1 - a - 1 = a_n - a.$$

Dies können wir weiter umrechnen:

$$|(a_n+1)^{1/3} - (a+1)^{1/3}| = \frac{|a_n - a|}{|(a_n+1)^{2/3} + (a_n+1)^{1/3}(a+1)^{1/3} + (a+1)^{2/3}|}.$$

Da $a_n \geq 0$ und $a \geq 0$ vorausgesetzt war, können wir die rechte Seite abschätzen, indem wir den Nenner durch 1 ersetzen:

$$|(a_n+1)^{1/3} - (a+1)^{1/3}| \leq |a_n - a|.$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen a konvergiert, finden wir ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| \leq \varepsilon$ ist für $n \geq N$. Damit folgt aus unserer Ungleichung:

$$|(a_n+1)^{1/3} - (a+1)^{1/3}| \leq \varepsilon$$

für $n \geq N$. Das beweist die behauptete Konvergenz.

Aufgabe 5 Seien $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Hinweis: Vollständige Induktion nach n.

Lösung: Beweis durch vollständige Induktion nach n. Der Induktionsanfang lautet:

$$(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x,$$

was trivialerweise richtig ist. Sei die Behauptung nun bewiesen für n. Wir schließen von n auf $n+1$.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x).$$

Da nach Voraussetzung $1+x \geq 0$ ist, können wir mittels der Induktionsannahme abschätzen:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

Im letzten Schritt haben wir $nx^2 \geq 0$ verwendet. Das ist die Behauptung für $n+1$, so dass die Bernoullische Ungleichung bewiesen ist.

Aufgabe 6 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Hinweis: Bernoullische Ungleichung.

Lösung:

a) Zur Abkürzung sei $a_n := \frac{n}{2^n}$. Wir zeigen die Konvergenz, indem wir das Quotientenkriterium verwenden. Es ist:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}).$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ folgt hieraus sofort

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2},$$

womit das Quotientenkriterium erfüllt ist und die Reihe konvergiert.

b) Damit eine Reihe konvergiert, müssen die Reihenglieder notwendigerweise eine Nullfolge sein. Hier jedoch haben wir für $n \geq 1$

$$\left|\frac{(-1)^n n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} \geq \frac{n}{n+n} \geq \frac{1}{2}$$

Also liegt keine Nullfolge vor und die Reihe kann nicht konvergieren.

c) Um die Konvergenz der Reihe nachzuweisen, verwenden wir das Quotientenkriterium. Sei zur Abkürzung $c_n := \frac{n!}{n^n}$. Dann erhalten wir:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Wir schätzen den Bruch nach oben ab, indem wir den Nenner nach unten abschätzen. Dazu verwenden wir die Bernoullische Ungleichung mit $x = \frac{1}{n} \geq -1$:

$$(1+\frac{1}{n})^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

Also ist

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \frac{1}{2}.$$

Somit ist das Quotientenkriterium erfüllt und die Reihe konvergiert.