Mathematisches Institut
der Universität München
Horst Osswald

7.2.2004
Klausur - Lösungen

Lineare Algebra für Informatiker I

Die Lösungen sind in Kurzform gehalten und stellen in keinster Weise eine vollständige Lösung dar. Alle Angaben ohne Gewähr.

Aufgabe 1 Seien $b_1, ..., b_4 \in \mathbb{R}$ und sei
$-x - 2z = b_1$
$3x + 4y + 2z + 4u = b_2$
$y - z + u = b_3$
$2x + y + 3z + u = b_4$

(a) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Gleichungssystems. [2 Punkte]

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung des Gleichungssystems für $(b_1, ..., b_4) := (-3, 5, -1, 5)$ und damit die Gesamtheit der Lösungen. [2 Punkte]

(c) Finden Sie mindestens ein $(b_1, ..., b_4) \in \mathbb{R}^4$, für das das Gleichungssystem keine Lösung hat. [2 Punkte]

Lösung Die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 & b_1 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & b_2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & b_3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & b_4 \end{array}\right)$$

bring man mittels Zeilenumformungen (Gauss Algorithmus) auf folgende Form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \frac{1}{4}(b_2 + 3b_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4b_3 - b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4b_4 - b_2 + 5b_1 \end{array}\right)$$

(a) Man liest die Basis aus der Matrix ab: $((-2, 1, 1, 0), (0, -1, 0, 1))$.

(b) Man setze dazu $(b_1, \ldots, b_4) := (-3, 5, -1, 5)$ in die Matrix ein:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Also spezielle Lösung z. B. $(3, -1, 0, 0)$. Gesamtheit der Lösungen:

$$(3, -1, 0, 0) + [((-2, 1, 1, 0), (0, -1, 0, 1))].$$

(c) Nicht lösbar, wenn z. B. $4b_3 - b_2 - 3b_1 \neq 0$. Setze also z. B. $b_1 := 1$ und $b_2 = b_3 = b_4 = 0$.

Aufgabe 2 Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear mit $M_{E_2}^{E_3}(f) := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, wobei E_3, E_2 die kanonischen Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$ sind. Sei $A := (a, b, c)$ und $B := (u, v)$ mit $a := (2, 1, -1), b := (1, 0, 3), c := (-1, 2, 1)$, $u := (1, 1), v := (1, -1)$.

(a) Berechnen Sie $M_{((0,1),(1,0))}^{((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0))}(f)$. [2 Punkte]

(b) Berechnen Sie $f(1, 2, 3)$. [2 Punkte]

(c) Berechnen Sie $M_B^A(f)$. [2 Punkte]

Lösung (a) Ergibt sich aus Vertauschung von Spalten/Zeilen, da ja nur die kanonischen Einheitsbasen in anderer Reihenfolge auftreten.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $(M_{E_2}^{E_3}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix})^T = (13, -3)$.

(c) Man berechne die Bilder der Basisvektoren a, b, c un stelle die Ergebnisse jeweils als Linearkombination von u, v dar.

$$f(a) = (M_{E_2}^{E_3}(f) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})^T = (-1, 0) = -\tfrac{1}{2}u + (-\tfrac{1}{2}v).$$

$$f(b) = (M_{E_2}^{E_3}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix})^T = (9, 1) = 5u + 4v$$

$$f(c) = (M_{E_2}^{E_3}(f) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix})^T = (7, -5) = 1u + 6v$$

Damit

$$M_B^A(f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie die inverse Matrix von $M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. [2 Punkte]

Lösung Die Matrix
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
bringt man mittels Zeilenunformungen (Gauss Algorithmus) auf die Form
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$
Also ist die inverse Matrix von M:
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 Seien U, V Vektorräume über K, sei W ein Untervektorraum von V und sei $f : U \to V$ linear. Zeigen Sie, daß $S := \{x \in U \mid f(x) \in W\}$ ein Untervektorraum von U ist. [2 Punkte]

Lösung Es müssen für S die Untervektorraumkriterien nachgeprüft werden:
1. Da f linear ist, gilt $f(0) = 0$. Da W UVR ist, ist $0 \in W$. Also ist $0 \in S$, folglich $S \neq \emptyset$.
2. Seien $x, y \in S$. Da f linear ist, gilt $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Nach Voraussetzung sind $f(x), f(y) \in W$. Da W UVR ,also abgeschlossen bzgl. + ist, ist auch $f(x) + f(y) \in W$. Somit $x + y \in S$.
3. Sei $x \in S$, $\alpha \in K$. Wie in 2: $f(\alpha x) = \alpha f(x) \in W$, also $\alpha x \in S$.