Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Dr. Fritsch

WS 2002/03
7.9.2003

Klausur zur linearen Algebra I für Informatiker

Aufgabe 1:
Definieren Sie folgende Begriffe:
a) Ring
b) Gruppenisomorphismus

4 Punkte

Aufgabe 2:
Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^5$? (mit Beweis)

a) $U_1 = \{(x_1, \ldots, x_5) | \sum_{i=1}^{5} x_i = 0\}$

b) $U_1 = \{(x_1, \ldots, x_5) | \sum_{i=1}^{5} x_i = 1\}$

c) $U_1 = \{(x_1, \ldots, x_5) | \sum_{i=1}^{5} i^2 x_i = 0\}$

6 Punkte

Aufgabe 3:
Es sei $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 1 & -1 & \alpha^2 \end{pmatrix}$, $L(\alpha)$ sei die Lösungsmenge der Gleichung $A(\alpha) \cdot x = 0$.
a) Geben Sie alle reellen Zahlen α an, für die gilt:
$\dim L(\alpha) = 0$
$\dim L(\alpha) = 1$
$\dim L(\alpha) = 2$
b) Geben Sie jeweils eine Basis von $L(\alpha)$ an.

6 Punkte

Aufgabe 4:
Auf der Menge $\mathbb{R}$ sei eine Verknüpfung „$*$“ definiert durch:
$x * y := |x| \cdot y$
a) Zeigen Sie: $(\mathbb{R}, *)$ ist eine Halbgruppe.
b) Zeigen Sie: $(\mathbb{R}, *)$ ist kein Monoid.

4 Punkte

Aufgabe 5:

Lösen Sie folgendes Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{C}$ für $a = 0$ und $a = 1$:
$(2+i)z_1 - (1+2i)z_2 = a$
$(1-2i)z_1 - (2-i)z_2 = a$

6 Punkte

Aufgabe 6:
V, W seien K-Vektorräume, $(b_1, \dots, b_k)$ sei eine Basis von V, $f : V \to W$ sei eine lineare Abbildung und die Vektoren $f(b_1), \dots, f(b_k)$ seien linear unabhängig.
Zeigen Sie: f ist injektiv.

6 Punkte

Aufgabe 7:
Es sei $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$; $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto A \cdot x$.
a) Bestimmen Sie $\mathrm{Fix}(f_A) := \{x \in \mathbb{R}^2 | f_A(x) = x\}$
b) Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: $f_A(f_A(x)) = x$

6 Punkte