Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Dr. Fritsch

WS 2002/03
7.9.2003

Musterlösung zur Klausur

Aufgabe 1:
a) Ein Ring ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen „+“ und „·“ , für die gilt:
$(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe
$(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe
es gelten die Distributivgesetze $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Bemerkung: Da in einem Ring die Multiplikation nicht unbedingt kommutativ zu sein braucht, muss man beide Distributivgesetze angeben.

b) Ein Gruppenisomorphismus ist eine bijektive Abbildung $f : G \to H$ zwischen zwei Gruppen G und H , die mit der Gruppenoperation verträglich ist, d. h. für die gilt:
$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \forall a, b \in G$

Aufgabe 2:
Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^5$? (mit Beweis)
a) ja:
Seien (x_i), $(y_i) \in U_1$
$\sum_{i=1}^5 (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^5 x_i + \sum_{i=1}^5 y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_i) + (y_i) \in U_1$
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$
$\sum_{i=1}^5 \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^5 x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda x_i \in U_1$

b) nein:
$(1, 0, 0, 0, 0) \in U_2$, aber $2 \cdot (1, 0, 0, 0, 0) = (2, 0, 0, 0, 0) \notin U_2$

(Aber: U_2 ist ein affiner Unterraum)

c) ja:
Seien (x_i), $(y_i) \in U_1$
$\sum_{i=1}^5 i^2(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^5 i^2 x_i + \sum_{i=1}^5 i^2 y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_i) + (y_i) \in U_1$
Sei $\lambda \in \mathbb{R}$
$\sum_{i=1}^5 i^2 \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^5 i^2 x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda x_i \in U_1$

6 Punkte

Aufgabe 3:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 1 & -1 & \alpha^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 - 1 \end{pmatrix}$$
$\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Rang } A(\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad \dim L_\alpha = 3 - 1 = 2$
$\alpha = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{Rang } A(\alpha) = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim L_\alpha = 3 - 2 = 1$

$\alpha \notin \{-1, 1\} \;\Rightarrow\; \text{Rang } A(\alpha) = 3 \;\Rightarrow\; \dim L_\alpha = 0$

b) $\alpha \notin \{-1, 1\} \;\Rightarrow\;$ Basis ist die leere Familie
$\alpha = -1:$
$$A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$x_3 =$ beliebig
$x_2 = 0$
$x_1 = -x_3$
$$\Rightarrow \; L_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} \;\Rightarrow\; \text{Basis: } \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
$\alpha = 1:$
$$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
x_2, x_3 beliebig
$x_1 = x_2 - x_3$
$$\Rightarrow \; L_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \;\Rightarrow\; \text{Basis: } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Aufgabe 4:

a)
Wohldefiniertheit der Verknüpfung ist erfüllt.
Assoziativität:
$(x * y) * z = ||x| \cdot y| \cdot z = |x| \cdot |y| \cdot z$
$x * (y * z) = |x| \cdot (|y| \cdot z) = |x| \cdot |y| \cdot z$

b)
Es gibt kein neutrales Element:
Annahme:
$|x| \cdot y = x \quad \forall x$
$$\left.\begin{array}{l} x < 0 \;\Rightarrow\; y = -1 \\ x > 0 \;\Rightarrow\; y = 1 \end{array}\right\} \text{Widerspruch}$$

Aufgabe 5:

I) $(2 + i)z_1 - (1 + 2i)z_2 = a$
II) $(1 - 2i)z_1 - (2 - i)z_2 = a$

I) $(2 + i)(1 - 2i)z_1 - 5z_2 = a(1 - 2i)$
II) $(2 + i)(1 - 2i)z_1 - 5z_2 = a(2 - i)$

I)-II): $0 = a(-1 - i)$

$a = 1 \;\Rightarrow\;$ keine Lösung

$a = 0 \quad \Rightarrow \quad$ Beide Gleichungen sind äquivalent.
Setze z_2 beliebig,
$\Rightarrow \quad z_1 = \dfrac{1+2i}{2+i} z_2 = \ldots = \dfrac{4+3i}{5} z_2$
$\Rightarrow \quad L = \left\{ \left. \begin{pmatrix} \frac{4+3i}{5} z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right| z_2 \in \mathbb{C} \right\} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} \frac{4+3i}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 4+3i \\ 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6:
Sei $f(x) = f(y), \quad x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i, \quad y = \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i. \quad \Rightarrow$
$f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i) = f(\sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i).$
f ist linear $\quad \Rightarrow$
$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(b_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i f(b_i).$
$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) f(b_i) = 0$
Die $f(b_i)$ sind linear unabhängig $\quad \Rightarrow \quad \lambda_i - \mu_i = 0 \; \forall i$
$\Rightarrow \quad x = y$
f ist also injektiv.

Aufgabe 7:

a) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = x$
$\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y = y$

$-\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y = x$
$\frac{4}{5}x - \frac{8}{5}y = y$

$\Rightarrow \quad -x + 2y = 0$

$L = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} \right| y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
b) $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$ Behauptung