1. Sei $u(x, y) = 2xy$ auf $\mathbb{R}^2$.

   Bestimmen Sie alle Funktionen v, so dass $f := u + iv$ als Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist (falls es solche v gibt).

2. Untersuchen Sie die Funktion $f(z) := \exp\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)$ auf $\mathbb{C}\backslash\{1\}$:

   a) Bestimmen Sie die Laurentreihe von f um den Entwicklungspunkt 1.

   b) Welchen Typ hat die Singularität?

   c) Für welche geschlossenen Kurven γ in $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$?

3. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$:

   a) Falls $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für alle geschlossenen Wege in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ gilt, so ist f konstant.

   b) Falls $|f(z)| \geq c$ für ein $c > 0$ und alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ gilt, so ist f konstant.

4. Sei U ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$, die kompakt gegen eine Funktion f konvergiert.

   Zeigen Sie: f ist stetig und für alle stückweise stetig differenzierbaren Kurven γ in U gilt

   $$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n dz = \int_\gamma f dz.$$

5. Betrachten Sie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z^n + 1}$:

   a) Zeigen Sie, dass die Reihe auf $D(0, 1)$ normal konvergiert.

   b) Berechnen Sie die Ableitung der Grenzfunktion und erläutern Sie kurz, weshalb Ihre Rechnung zulässig ist.

6. Sei $l : \mathbb{C}^{**} \to \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus.

   Ist l stetig auf die Halbgerade $0 > x \in \mathbb{R}$ fortsetzbar?

   Beschreiben Sie das Übergangsverhalten von l an der Halbgerade $0 > x \in \mathbb{R}$ im Hinblick auf andere Zweige des Logarithmus.

7. Seien $f, g : D(0, 2) \to \mathbb{C}$ holomorph ohne Nullstellen mit der Eigenschaft, dass $|f(z)g(z)| = 5$ für alle $z \in \partial D(0, 1)$ gelte.

   Zeigen Sie: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass auf ganz $D(0, 2)$ gilt: $f = \frac{\lambda}{g}$.

8. a) Sei $f(z) := \frac{e^{iz}}{z^2 + 4}$ und $\gamma_R := Re^{i\pi t}$ für $t \in [0, 1]$ und $R > 0$. Zeigen Sie:

   $$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

   b) Berechnen Sie $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2 + 4} dx$.

9. Sei u eine (reellwertige, zweimal stetig differenzierbare) harmonische Funktion auf einem Gebiet G in $\mathbb{R}^2$.

   Zeigen Sie: u ist eine offene Abbildung.

10. Sei f eine nicht-konstante holomorphe Funktion auf einem Gebiet G in $\mathbb{C}$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nullstellenfreier holomorpher Funktionen auf G, die kompakt gegen f konvergiert.

    Zeigen Sie, dass f keine Nullstelle hat.

    Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und verwenden Sie das Minimum-Prinzip.