MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. W. Spann
Dr. S. Wugalter, K. Linde

Wintersemester
2003/2004

Lösung zur 2. Klausur (Analysis für Informatiker, Bioinformatiker und Medieninformatiker)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punktzahl	4	4	4	4	4	4	24

Bearbeitungszeit: 120 min.

1. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

   (a) Beh.: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k^2-1}}$ divergiert.
   Bew.: Wir haben $\sqrt{2k^2-1} < \sqrt{2k^2} = \sqrt{2}k$
   Daher folgt
   $$\frac{1}{\sqrt{2k^2-1}} > \frac{1}{\sqrt{2}k}$$
   Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}k}$ divergiert aber, somit divergiert wegen Minoranten-Kriterium auch unsere Reihe.

   (b) Beh.: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^2+1}}$ konvergiert
   Bew.: Wir zeigen zuerst, dass $\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right)_n$ eine monoton fallende Nullfolge ist:
   Es gilt: $\sqrt{k^2+1} < \sqrt{(k+1)^2+1}$, außerdem gilt
   $$0 \leq \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k^2}} = \frac{1}{k} \to 0 \text{ für } k \to \infty$$
   Weil es sich um eine alternierende Reihe handelt, folgt wegen Leibnitz-Kriterium die Konvergenz.

   (c) Beh.: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4^k}{k!}$ konvergiert.
   Erster Bew.: Anwendung des Quotientenkriteriums
   $$\frac{\left|(-1)^{k+1} \frac{4^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|(-1)^k \frac{4^k}{k!}\right|} = \frac{\frac{4^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{4^k}{k!}} =$$

$$= \frac{4^{k+1}}{4^k} \cdot \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{4}{k+1}.$$

Man kann nun argumentieren: Für alle $k > 5$ gilt $\frac{4}{k+1} < \frac{4}{5} < 1$, folglich konvergiert die Reihe.
Oder man kann sagen: $\frac{4}{k+1} \to 0$ für $k \to \infty$, folglich konvergiert die Reihe.
Zweiter Bew.: Anwendung des Wurzelkriteriums

$$\sqrt[k]{\left|(-1)^k \frac{4^k}{k!}\right|} = \sqrt[k]{\frac{4^k}{k!}} = \frac{4}{\sqrt[k]{k!}} = \frac{4}{k} \cdot \frac{k}{\sqrt[k]{k!}} \to 0 \cdot e = 0$$

Dritter Bew.: Wir haben

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

Es folgt für unsere Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k!} = e^{-4} - 1.$$

2. Konvergenzradius

   (a) Beh.: Der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k+1} x^k$ ist $R = \frac{1}{2}$

   Bew.: $\sqrt[k]{2^k} = 2$.
   Wegen $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{a_k}}$ folgt die Beh.

   (b) Beh.: Der Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{k}\right)^k k! x^k$ ist $R = \frac{e}{3}$.

   Bew.:

$$\sqrt[k]{\left(\frac{3}{k}\right)^k k!} = \left(\frac{3}{k}\right) \cdot \sqrt[k]{k!} \to \frac{3}{e}.$$

   Folglich gilt: $R = \frac{e}{3}$

   (c) Beh.: Der Konvergenzradius von $\sum_{k=1}^{\infty} 4^{(k^2)} x^k$ ist $R = 0$

   Bew.:

$$\sqrt[k]{4^{(k^2)}} = 4^k \to \infty$$

3. Ableitungen

   (a)

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x^{\cos(x)}) = \frac{d}{dx} e^{\cos(x)\ln(x^2)} =$$

$$= \frac{d}{dx} e^{2\cos(x)\ln(x)} = e^{2\cos(x)\ln(x)} \cdot (-2\sin(x)\ln(x) + \frac{2\cos(x)}{x}).$$

(b) $g(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ $(x > 1)$

$$\frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) =$$
$$= \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) \cdot \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{-4x}{(x^2-1)(x^2+1)}.$$

(c) $h(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x \cdot x^{\sqrt{2}}$ $(x > 0)$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2}\right)^x \cdot x^{\sqrt{2}} = \frac{d}{dx}e^{x\ln(\sqrt{2})} \cdot x^{\sqrt{2}} =$$
$$= e^{x\ln(\sqrt{2})}\ln(\sqrt{2}) \cdot x^{\sqrt{2}} + = e^{x\ln(\sqrt{2})}\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}.$$

(d) $k(x) = \sqrt[x^2]{x^2}$ $(x > 0)$

$$\frac{d}{dx}\sqrt[x^2]{x^2} = \frac{d}{dx}(x^2)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{d}{dx}e^{\frac{2\ln(x)}{x^2}} =$$
$$= e^{\frac{2\ln(x)}{x^2}} \cdot \frac{2x - 4\ln(x)x}{x^4}$$

4. Es sei die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

(a) (i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$
(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion an der Stelle $x = e$ ihren maximalen Wert annimmt.

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\frac{\ln(x)}{x} = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln(x)}{x^2} =$$
$$= \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2}$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Wir untersuchen die Funktion an der Stelle auf Monotonie:

x	$< e$	$= e$	$> e$
$f'(x)$	> 0	$= 0$	< 0

Die Tabelle kann wie folgt erstellt werden:
Setzen wir etwa 1 ein, also eine Zahl $< e$, so erhalten wir $f'(1) = +1 > 0$.
Setzen wir etwa e^2 ein, also eine Zahl $> e$, so erhalten wir $f'(1) = -\frac{1}{e^4} < 0$.

(c) Beh.: Die Gleichung

$$\frac{\ln(x)}{x} = y$$

besitzt für $y \in (0, \frac{1}{e})$ zwei Lösungen und für $y \leq 0$ genau eine Lösung besitzt.
Bew.: Sei $y \in (0, \frac{1}{e})$. Wir haben an der Stelle $x = e$ ein Maximum mit dem Wert $f(e) = \frac{1}{e}$. Das ist das einzige Maximum. Die Funktion fällt für $x > \frac{1}{e}$ und konvergiert gegen 0, sie steigt für $1 < x < \frac{1}{e}$. Nach Zwischenwertsatz haben wir also zwei Lösungen.
Zu $y \leq 0$: Für $x > 1$ gilt $f(x) > 0$. Für $x \leq 1$ gilt $f(x) \leq 0$ und wir haben $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$. Nach Zwischenwertsatz folgt die Behauptung, dass jeder Wert angenommen wird. Er wird genau einmal angenommen, weil die Funktion streng monoton steigend für $0 < x \leq 1$ ist.

5. (a) Beh.: Die Funktion $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ besitzt für $0 < x < e$ eine auf $(-\infty, \frac{1}{e})$ differenzierbare Umkehrfunktion.
Bew.:

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Für $0 < x < e$ gilt: $f'(x) < 0$, weil der Nenner $x^2 > 0$ ist und der Zähler $1 - \ln(x) < 0$ ist.
Folglich ist die Funktion streng monoton fallend, also gibt es eine differenzierbare Umkehrfunktion.

(b)

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} \overset{(*)}{=} \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{1-\ln(1)}{1^2}} = 1.$$

Zu (*): Wir haben das x zu finden, so dass $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

6. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

(a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x^2)}{x^2} = \lim_{x \to 0} 2 \cdot \frac{\sin(2x^2)}{2x^2} = 2 \cdot 1 = 2.$$

(b)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(x) - 1|}{\sin(x) - 1} = 1$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2}$ Anwendung von L'Hospital:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{-1}{1-x}+1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{(1-x)^2}}{2} = \dfrac{1}{2}.$

(d)

$$\lim_{x\to 0} x^{(x^x)} = \lim_{x\to 0} e^{x^x\cdot\ln(x)} = \lim_{x\to 0} e^{e^{x\ln(x)}\cdot\ln(x)} \overset{(*)}{=} 0$$

Zu (*): Es gilt $x\ln(x)\to 0$ für $x\to 0$. Folglich

$$\lim_{x\to 0} e^{x\ln(x)}\cdot\ln(x) = -\infty.$$

Und wir wissen $e^x\to 0$ für $x\to -\infty$.