1. a) Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Lösung

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) - n = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 \ .$$

2. Lösung

$$A(1): \qquad \sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2-1 = 1$$

$$A(n) \Rightarrow \quad A(n+1): \quad \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = 2n+1+\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = (2n+1)+n^2 = (n+1)^2 \ .$$

b) Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i}(n+1)$.

Lösung

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(n+1) = \sum_{i=1}^{n} i(n+1) = (n+1)\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)^2}{2}$$

2. Zeigen Sie :

a) $3^n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Lösung

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} 2^n \binom{n}{k}$$

b) $\binom{2n}{n-k} = \binom{2n}{n+k} \quad (n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n)$.

Lösung

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n-k} &= \frac{(2n)!}{(n-k)!(2n-(n-k)!)} = \frac{(2n)!}{(n-k)!((n+k)!} \\
\binom{2n}{n+k} &= \frac{(2n)!}{(n+k)!(2n-(n+k)!)} = \frac{(2n)!}{(n+k)!((n-k)!}
\end{aligned}$$

3. Zeigen Sie, dass für die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $x_0 = 2$ und $x_{n+1} = 3x_n + 2$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt : $x_n = 3^{n+1} - 1$.
Berechnen Sie : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$

Lösung

$$A(0): \qquad x_0 = 2 = 3^{0+1} - 1$$

$$A(n) \Rightarrow \quad A(n+1): \quad x_{n+1} = 3x_n + 2 = 3(3^{n+1}-1)+2 = 3\cdot 3^{n+1} - 1 = 3^{n+2} - 1 \ .$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3^{n+2}-1}{3^{n+1}-1} = \frac{3 - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3^{n+1}}} \to 3 \ .$$

$$3^n \le 3^{n+1} - 1 \le 3^{n+1} \quad \Rightarrow \quad 3 \le \sqrt[n]{3^{n+1}-1} \le 3\sqrt[n]{3} \to 3 \cdot 1 \ (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 3$$

4. a) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch $x_0 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{2}$ monoton wachsend und beschränkt ist.

Lösung

$$\begin{aligned} A(0):& \quad x_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \geq x_0 \\ A(n):& \quad x_{n+1} \geq x_n \\ A(n) \Rightarrow \quad A(n+1):& \quad x_{n+2} = 1 + \frac{x_{n+1}}{2} \geq 1 + \frac{x_n}{2} = x_{n+1} \end{aligned}$$

Behauptung: $x_n \leq 3 \qquad x_0 \leq 3$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{2} \leq 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \leq 3$$

b) Begründen Sie die Existenz des Grenzwertes und geben Sie ihn an.

Lösung Monoton wachsend und beschränkt → Lim. existiert.

$$x_\infty := \lim_{n\to\infty} x_n \qquad x_\infty = 1 + \frac{x_\infty}{2} \Rightarrow x_\infty = 2\ .$$

5. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen :

a) $\dfrac{2n^2 - n}{n^2 + 3n}$, b) $\sqrt[n]{4n^4}$, c) $\sqrt{\dfrac{n^n}{(n+1)^n}}$, d) $n(\ln(2n+1) - \ln 2n)$.

Lösung

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n}{n^2 + 3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = 2\ .$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n^4} = \sqrt[n]{4}\left(\sqrt[n]{n}\right)^4 = 1\ .$

c) $\displaystyle\sqrt{\frac{n^n}{(n+1)^n}} = \sqrt{\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}} \to \frac{1}{\sqrt{e}}\ .$

d) $\displaystyle n(\ln(2n+1) - \ln(2n)) = n \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \to$
$\displaystyle\to \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}\ .$

6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass für Funktion $\max(f, 0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto \max(f(x), 0)$ gilt: $\max(f, 0) = \dfrac{1}{2}(f + |f|)$.

Lösung

$\max(f(x), 0)$:

$$\begin{aligned} \text{1. Fall :} \quad & f(x) \geq 0 \quad \max(f(x),0) = f(x) \\ & \qquad\qquad \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x)) = f(x) \\ \text{2. Fall :} \quad & f(x) < 0 \quad \max(f(x),0) = 0 \\ & \qquad\qquad \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|) = \frac{1}{2}(f(x) - f(x)) = 0 \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie : Ist f eine Lipschitz-stetige Funktion, dann ist auch die Funktion $\max(f, 0)$ Lipschitz-stetig.

Lösung

$$|\max(f(x), 0) - \max(f(y), 0)| = \frac{1}{2}|f(x) - f(y) + |f(x)| - |f(y)|| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(|f(x) - f(y)| + ||f(x)| - |f(y)||) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(|f(x) - f(y)| + |f(x) - f(y)|) = |f(x) - f(y)| \leq \mathrm{L}|x - y| \ .$$